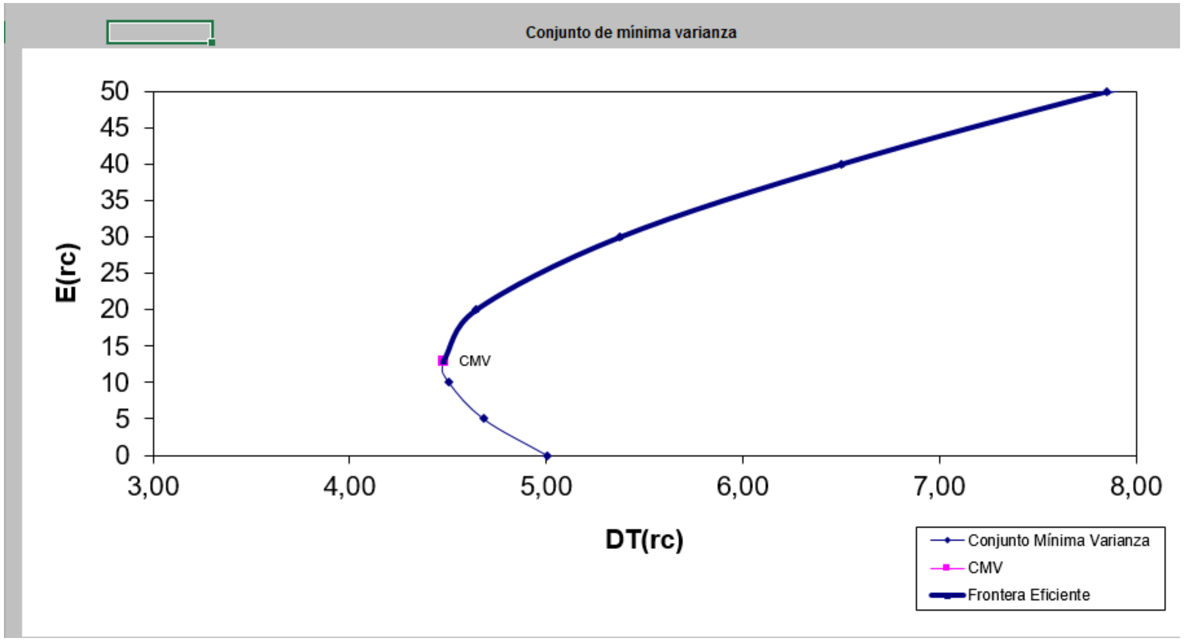
Finanzas I
Gestión de carteras



Laura Ballester Miquel
Dpto. de Economía Financiera y Actuarial
Laura.Ballester@uv.es

Finanzas I
Gestión de carteras

Gestión de Carteras I

1. Que significa ser accionista
2. Cuáles son los derechos y riesgos de un accionista
3. Cómo se calcula el rendimiento de una acción
4. Ejercicio
5. Cómo se calcula el riesgo de una acción
6. Ejercicio

Gestión de Carteras II

1. La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado
2. Combinación de activos financieros: el concepto de diversificación
3. Qué es el coeficiente de correlación
4. Ejercicio

Gestión de carteras III

1. Cómo se calcula el rendimiento de una cartera de acciones
2. Ejercicio
3. Cómo se calcula el riesgo de una cartera de acciones
4. Ejercicio

Teoría de carteras de Markowitz

1. Introducción
2. El modelo de selección de carteras de Markowitz
3. El concepto de frontera eficiente
4. Utilidad y aversión al riesgo

Resumen de gestión de carteras

- Este bloque está dedicado a la medida del **rendimiento** y del **riesgo** de **activos individuales**.

- A continuación, introduciremos el concepto del **coeficiente de correlación y la covarianza**, dada la importancia que tienen éstos para la combinación de activos en carteras. Ambas medidas son las que representan la relación existente entre dos activos financieros.

- En el bloque de gestión de carteras II veremos que se conoce como cartera de mercado, la relación de los activos financieros con ella y el concepto de beta de un activo financiero.

- Para finalizar, analizamos la **combinación de activos financieros** en carteras, determinando el rendimiento esperado y el riesgo de una cartera, y la aportación que un título individual realiza en ambos casos.

Rendimiento de una acción

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

- El **rendimiento** de las **acciones** puede provenir de dos vías:

✓ **Plusvalías o minusvalías** generadas por la evolución de la **cotización** en el mercado.

✓ Reparto de **dividendos** entre los accionistas

- El **rendimiento** correspondiente a un determinado **período de tiempo** (datos diarios) proporcionado por una acción vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}}$$

$P_{i,t}$ es el precio de la acción i en t (hoy)
$P_{i,t-1}$ es el precio de la acción i en t-1 (ayer)
$D_{i,t}$ es el dividendo que reparte la acción i en t (hoy)

Ejercicio: Rendimiento de una acción

- Supongamos que tenemos los precios de las acciones del Banco Santander y de Inditex correspondientes a toda la semana desde el **07/10 (viernes) hasta el 14/10 (viernes) de 2016**. Calcular la rentabilidad **DIARIA** de cada una de las acciones (4 decimales).

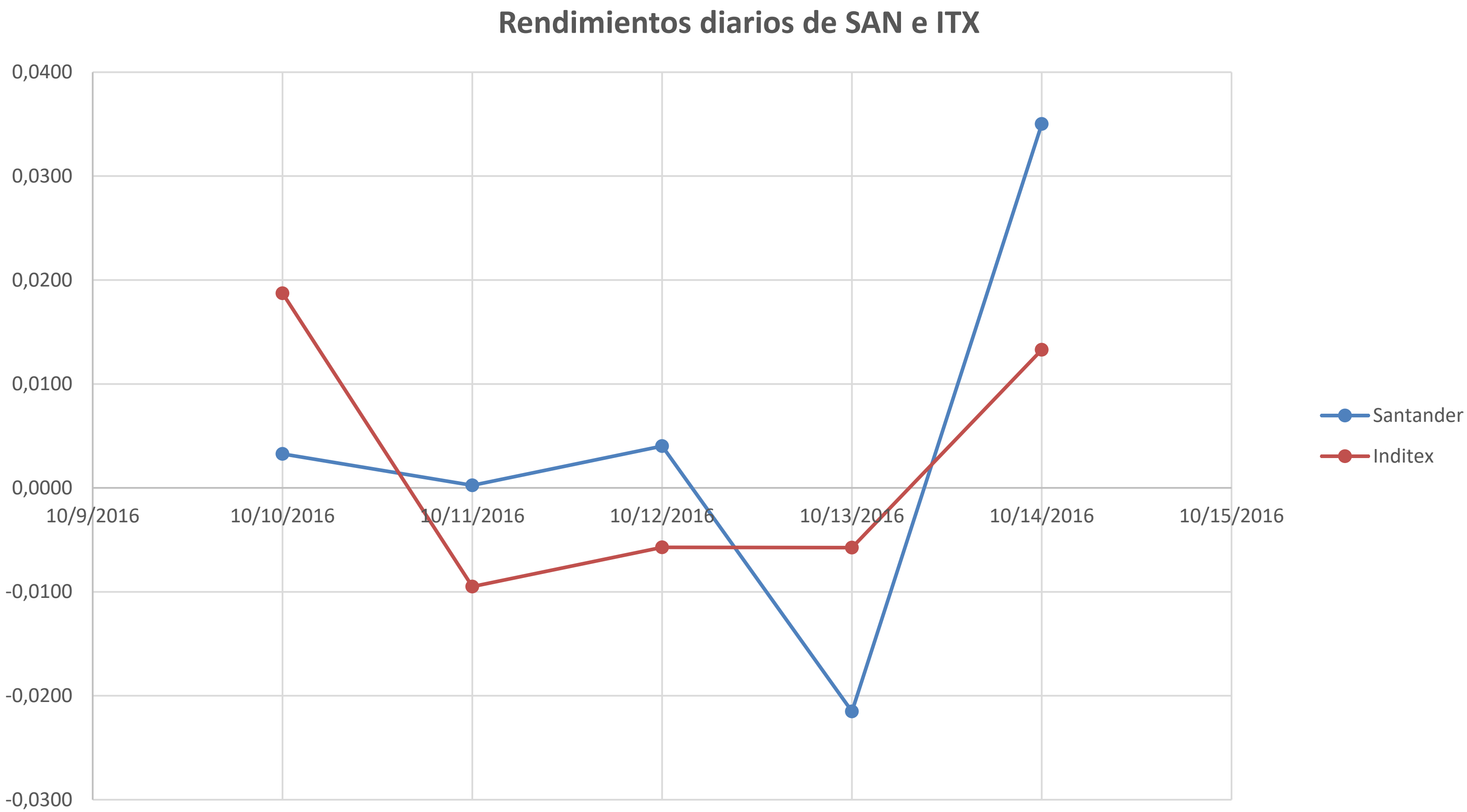
	Precios	
	Banco Santander	**Inditex**
07/10/2016	3,9690	32,0550
10/10/2016	3,9820	32,6550
11/10/2016	3,9830	32,3450
12/10/2016	3,9990	32,1600
13/10/2016	3,9130	31,9750
14/10/2016	4,0500	32,4000

→

	Rendimiento	
	Banco Santander	**Inditex**
07/10/2016	-	-
10/10/2016	0,0033	0,0187
11/10/2016	0,0003	-0,0095
12/10/2016	0,0040	-0,0057
13/10/2016	-0,0215	-0,0058
14/10/2016	0,0350	0,0133

Ejercicio: Rendimiento de una acción

➢ Dibuja las **rentabilidades diarias** de ambas acciones en un eje de ordenadas.



Rendimiento MEDIO de una acción

- Siempre que se calcula el **rendimiento MEDIO** de una acción hay que tener en cuenta el **periodo** para el cual se quiere calcular su valor medio. Para ello, se utiliza la fórmula del **promedio** de un conjunto de valores.

$$\boxed{\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}}{N}}$$

- $r_{i,t}$ es el rendimiento diario de la acción i en t
- $\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}$ es la suma de todos los rendimientos diarios de la acción i
- N número de días (tiempo) para los que se calcula el rendimiento medio

Ejercicio: Rendimiento medio de una acción

- Con las rentabilidades diarias obtenidas en el ejercicio anterior, calcular la **rentabilidad media de la semana** de cada una de las acciones.

SANTANDER

$$\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}}{N} = \frac{0{,}0210}{5} = 0{,}0042 = 0{,}42\%$$

INDITEX

$$\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}}{N} = \frac{0{,}0110}{5} = 0{,}0022 = 0{,}22\%$$

	Rendimiento	
	Banco Santander	**Inditex**
07/10/2016	-	-
10/10/2016	0,0033	0,0187
11/10/2016	0,0003	-0,0095
12/10/2016	0,0040	-0,0057
13/10/2016	-0,0215	-0,0058
14/10/2016	0,0350	0,0133
SUMA	**0,02010**	**0,0110**

Riesgo de una acción

- Como medida complementaria al rendimiento de una acción, es necesario calcular su **nivel de riesgo.**

- Para calcular el riesgo de una acción se suelen usar **dos medidas estadísticas**: la varianza o la desviación típica. Lo más común es usar esta última que en el mercado es llamada **volatilidad. La volatilidad de una acción mide la variabilidad de la acción respecto a su valor medio**.

1) Se calcula la **varianza**

$$\boxed{\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N}(r_{i,t} - \bar{r})^2}{N}}$$

2) Se hace su raíz cuadrada, que es la desviación típica o **volatilidad**

$$\boxed{\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}}$$

Ejercicio: Riesgo de una acción

- Calcula la **volatilidad** (riesgo) de estas dos acciones durante esta semana (poner 5 decimales):

1) Se hace la diferencia del rendimiento diario menos el rendimiento medio cada uno de los días.
2) Se eleva al cuadrado la diferencia anterior.
3) Se hace la suma de los valores anteriores.

	Rendimiento		**Rdto - Rdto medio**		**Rdto - Rdto medio Al cuadrado**	
	SAN	**ITX**	**SAN**	**ITX**	**SAN**	**ITX**
07/10/2016	-	-	-	-	-	-
10/10/2016	0,0033	0,0187	-0,00093	0,01651	0,00000	0,00027
11/10/2016	0,0003	-0,0095	-0,00396	-0,01170	0,00002	0,00014
12/10/2016	0,0040	-0,0057	-0,00019	-0,00793	0,00000	0,00006
13/10/2016	-0,0215	-0,0058	-0,02572	-0,00796	0,00066	0,00006
14/10/2016	0,0350	0,0133	0,03080	0,01108	0,00095	0,00012
SUMA					**0,00163**	**0,00066**

Ejercicio: Riesgo de una acción

4) Esa suma se divide entre el número de observaciones que se tiene (5 datos)

SANTANDER

$$\sigma_i^2 = \frac{0{,}00163}{5} = 0{,}00033 = 0{,}033\%$$

INDITEX

$$\sigma_i^2 = \frac{0{,}00066}{5} = 0{,}00013 = 0{,}013\%$$

Varianza SANTANDER=0,033%

Varianza INDITEX=0,013%

Ejercicio: Riesgo de una acción

5) Una vez obtenida la varianza, se hace su raíz cuadrada para obtener la volatilidad.

SANTANDER

$\sigma_i^2 = 0{,}033\%$

SANTANDER

$\sigma_i \quad = 1{,}8037\%$

INDITEX

$\sigma_i^2 = 0{,}013\%$

INDITEX

$\sigma_i \quad = 1{,}1477\%$

Volatilidad SANTANDER=1,8037%

Volatilidad INDITEX=1,1477%

Resumen de resultados

Rentabilidades medias:

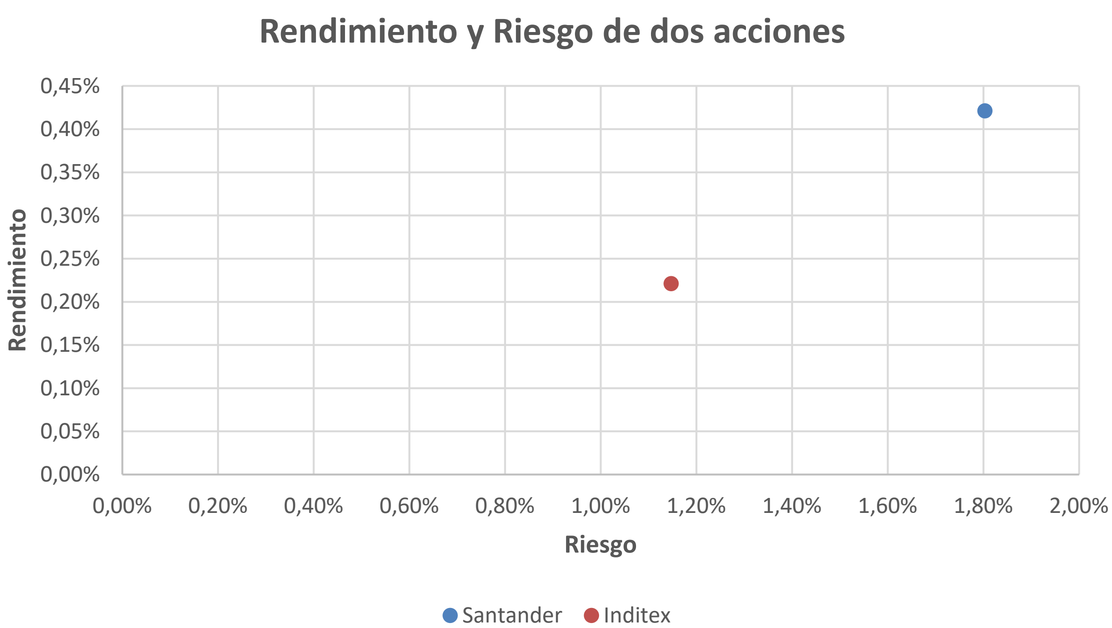
$$\bar{r}\ \textbf{SANTANDER} = 0,42\%$$

$$\bar{r}\ \textbf{INDITEX} = 0,22\%$$

Riesgo medido por la volatilidad:

$$\textbf{Volatilidad SANTANDER} = 1,8037\%$$

$$\textbf{Volatilidad INDITEX} = 1,1477\%$$



Relación entre dos activos financieros

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

- Un estadístico que proporciona información sobre esta cuestión es la **covarianza** entre dos acciones. **Las llamaremos acción i y acción j**.

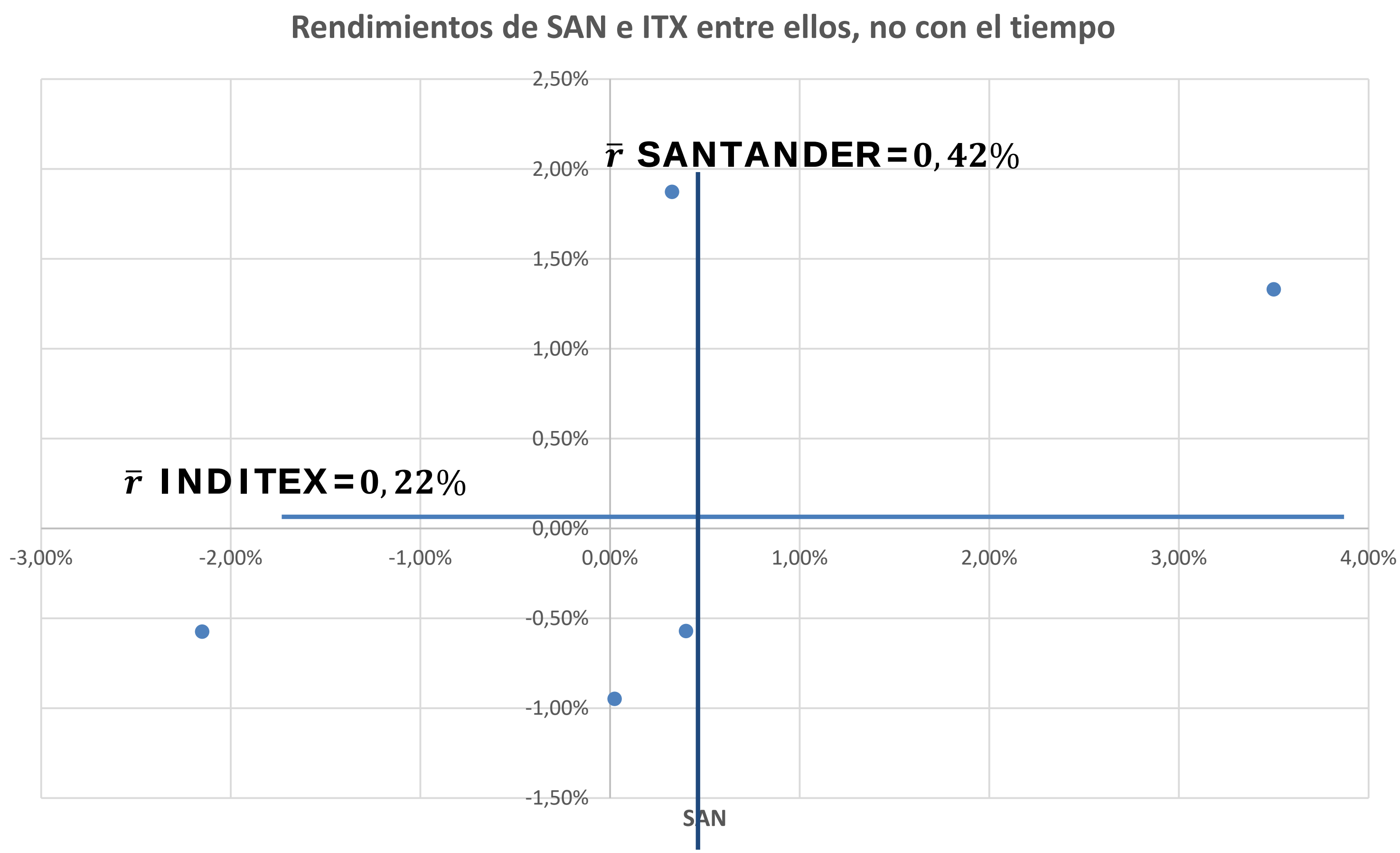
$$\sigma_{ij} = Cov\,(i,j) = \frac{\sum_{t=1}^{N}(r_{i,t}-\overline{r_i})\cdot(r_{j,t}-\overline{r_j})}{N-1}$$

✓ Donde r_i y r_j son las rentabilidades del activo i y j cada uno de los días y $\overline{r_i}$ y $\overline{r_j}$ son la media de las rentabilidades en ese periodo.

- ¿Qué información proporciona la **covarianza**? **En la medida en que se trata de un número positivo (negativo) lo que está indicando es que cuando una acción proporciona un rendimiento por encima de su media, la otra tiende a hacer lo mismo (lo contrario).**

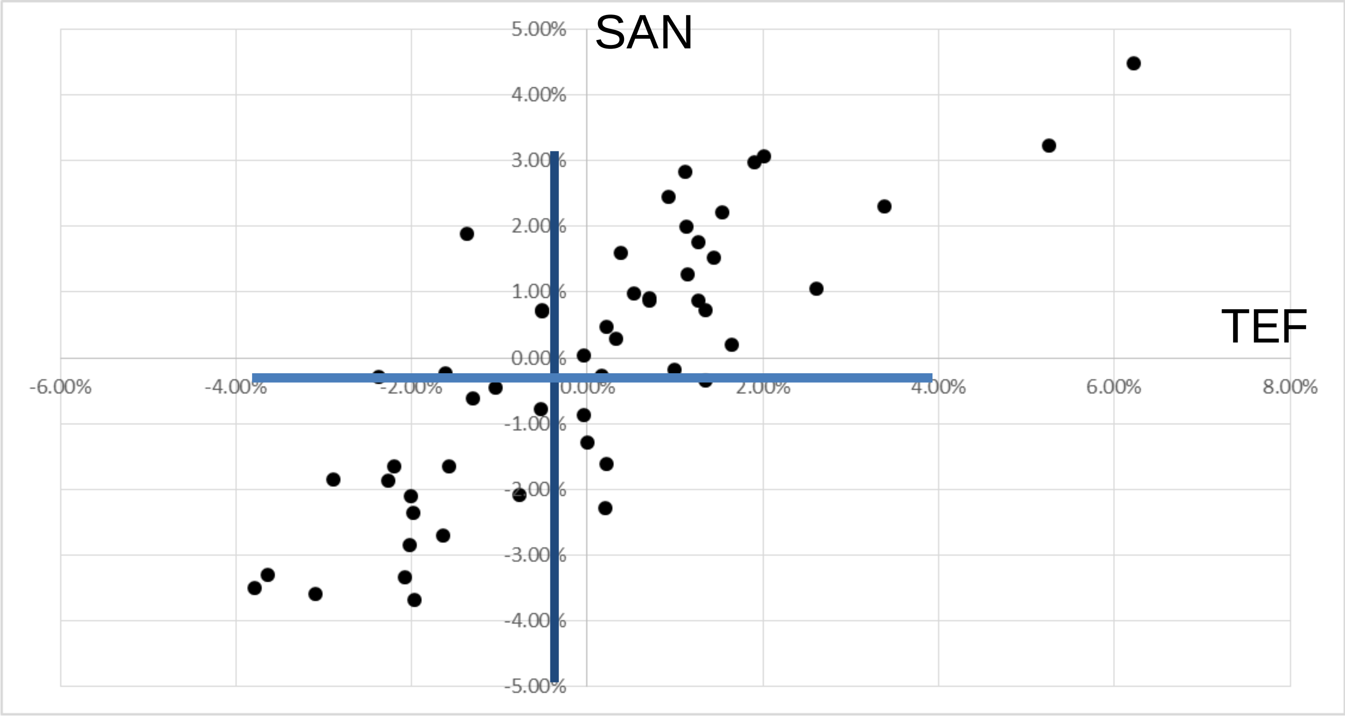
Relación entre dos activos financieros

- De manera gráfica se observa **dibujando los rendimientos diarios** de cada una de las acciones. Mirar la diferencia con el gráfico de la diapositiva 5.



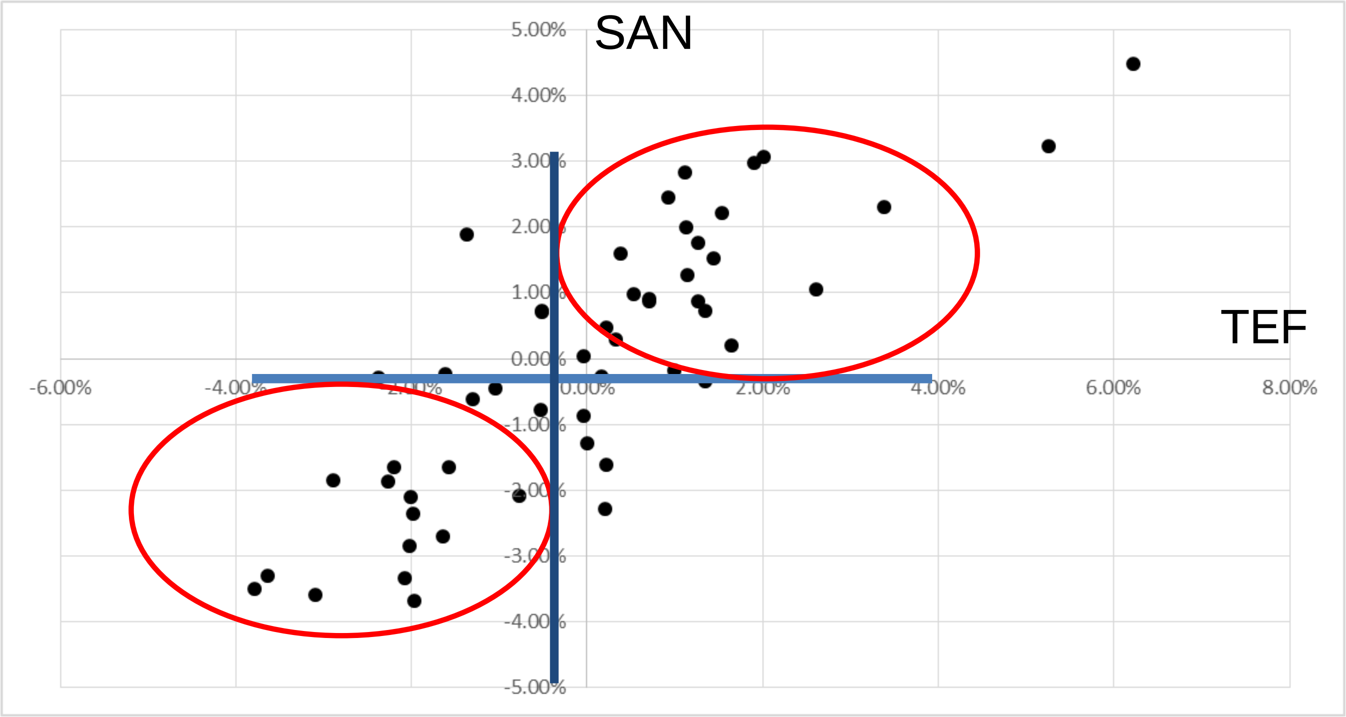
Relación entre dos activos financieros

- Para ver esta medida mejor que con únicamente 5 datos, suponemos que tenemos rendimientos diarios de dos acciones (SAN y TEF, 2015) para una muestra grande de datos. Dibujamos ambas series en un eje de coordenadas.
- Marcamos los rendimientos medios de esas series de datos y las dibujamos con líneas en el gráfico.



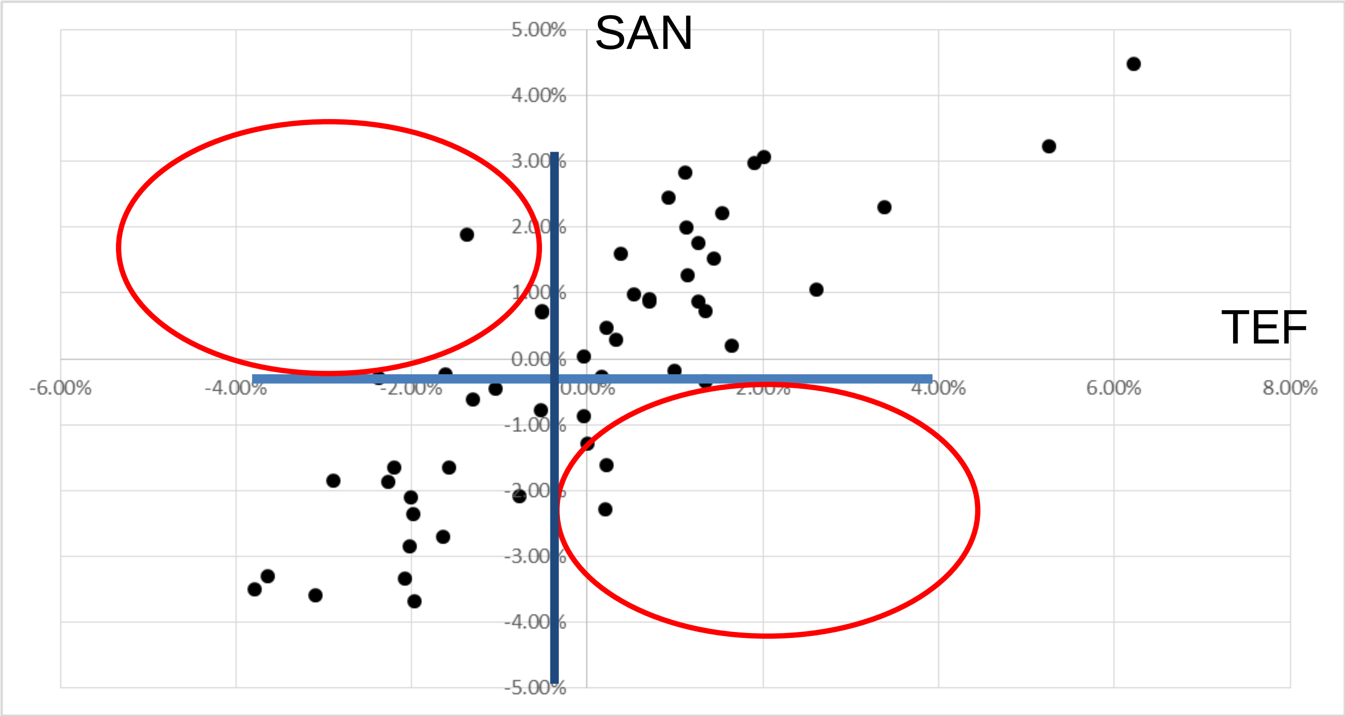
Relación entre dos activos financieros

- Para ver esta medida mejor que con únicamente 5 datos, suponemos que tenemos rendimientos diarios de dos acciones (SAN y TEF, 2015) para una muestra grande de datos. Dibujamos ambas series en un eje de coordenadas.
- Gráficamente una covarianza **positiva** indica que los rendimientos conjuntos tienden a situarse en los cuadrantes **I y III.**



Relación entre dos activos financieros

- Si la covarianza entre los rendimientos de los activos i y j es **negativa**, la mayoría de las observaciones se sitúan en los cuadrantes **II y IV**. Así, **cuando el rendimiento de un activo se sitúa por encima de su media, el otro tiende a situarse por debajo de la suya**.



Ejercicio: Relación entre dos activos

- Para nuestro ejemplo, la covarianza entre la acción de SAN e INDITEX es:

	Rendimiento		**Rdto - Rdto medio**		**Producto de las diferencias**
	SAN	**IDX**	**SAN**	**IDX**	**SAN por IDX**
07/10/2016	-	-	-	-	-
10/10/2016	0,0033	0,0187	-0,00093	0,01651	-0,00002
11/10/2016	0,0003	-0,0095	-0,00396	-0,01170	0,00005
12/10/2016	0,0040	-0,0057	-0,00019	-0,00793	0,00000
13/10/2016	-0,0215	-0,0058	-0,02572	-0,00796	0,00020
14/10/2016	0,0350	0,0133	0,03080	0,01108	0,00034
SUMA					**0,00058**

$$\sigma_{ij} = Cov_{SAN,IDX} = \frac{0{,}00058}{4} = 0{,}00014$$

Relación entre dos activos financieros

- El conocimiento de la **covarianza** es esencial ya que es fundamental a la hora de determinar la **varianza** de una **cartera** de acciones.

- Sin embargo, como un número en sí mismo no permite describir la naturaleza de la relación entre los rendimientos de dos activos. No obstante, podemos **estandarizar la covarianza** y obtener un mejor descriptor de dicha relación: **el coeficiente de correlación**.

- En principio, la covarianza es un **número no acotado** que puede tomar valores desde menos hasta más infinito, pero es posible acotarlo dividiendo por el producto de las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

El número resultante es denominado **coeficiente de correlación** y puede tomar valores entre **–1 y 1**.

Relación entre dos activos financieros

- Si $\rho_{i,j} = 1$ indica que las acciones están **perfectamente relacionadas**. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra también lo hará. **Correlación perfecta y positiva.**

- Si $\rho_{i,j} = -1$ indica que las acciones están **perfectamente relacionadas**. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra bajará. **Correlación perfecta y negativa.**

- Valores entre 1 y -1, indican que la **correlación no es perfecta**.

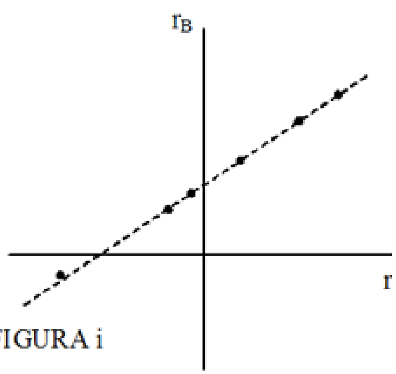


FIGURA i

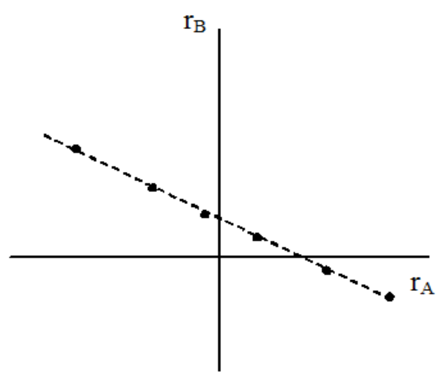


FIGURA iii

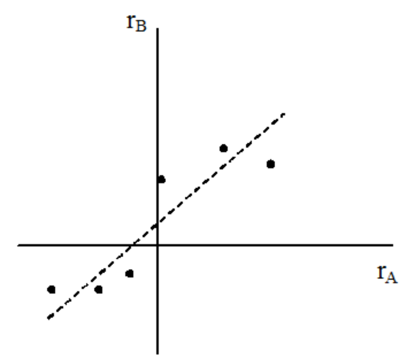
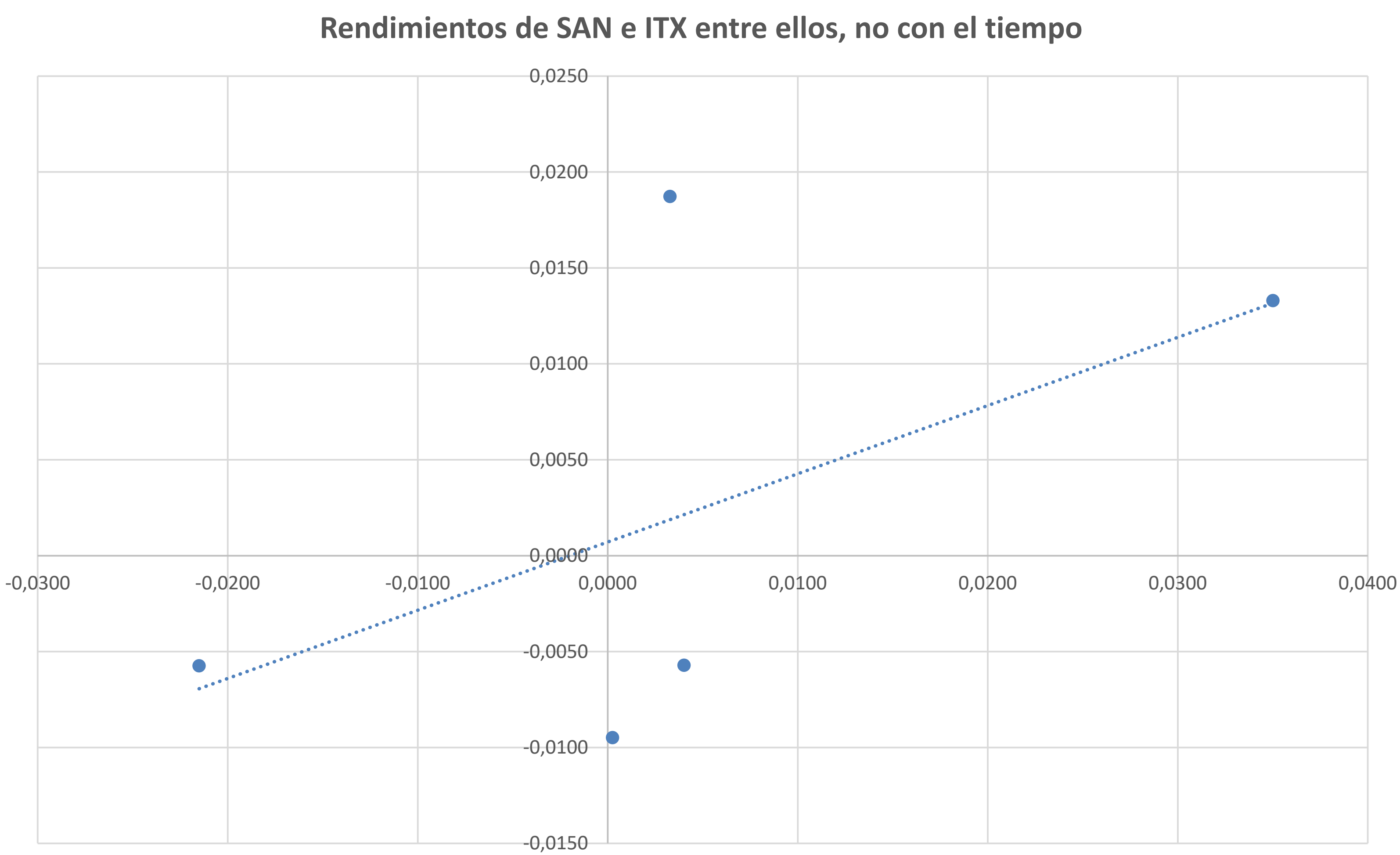


FIGURA iv

Relación entre dos activos financieros



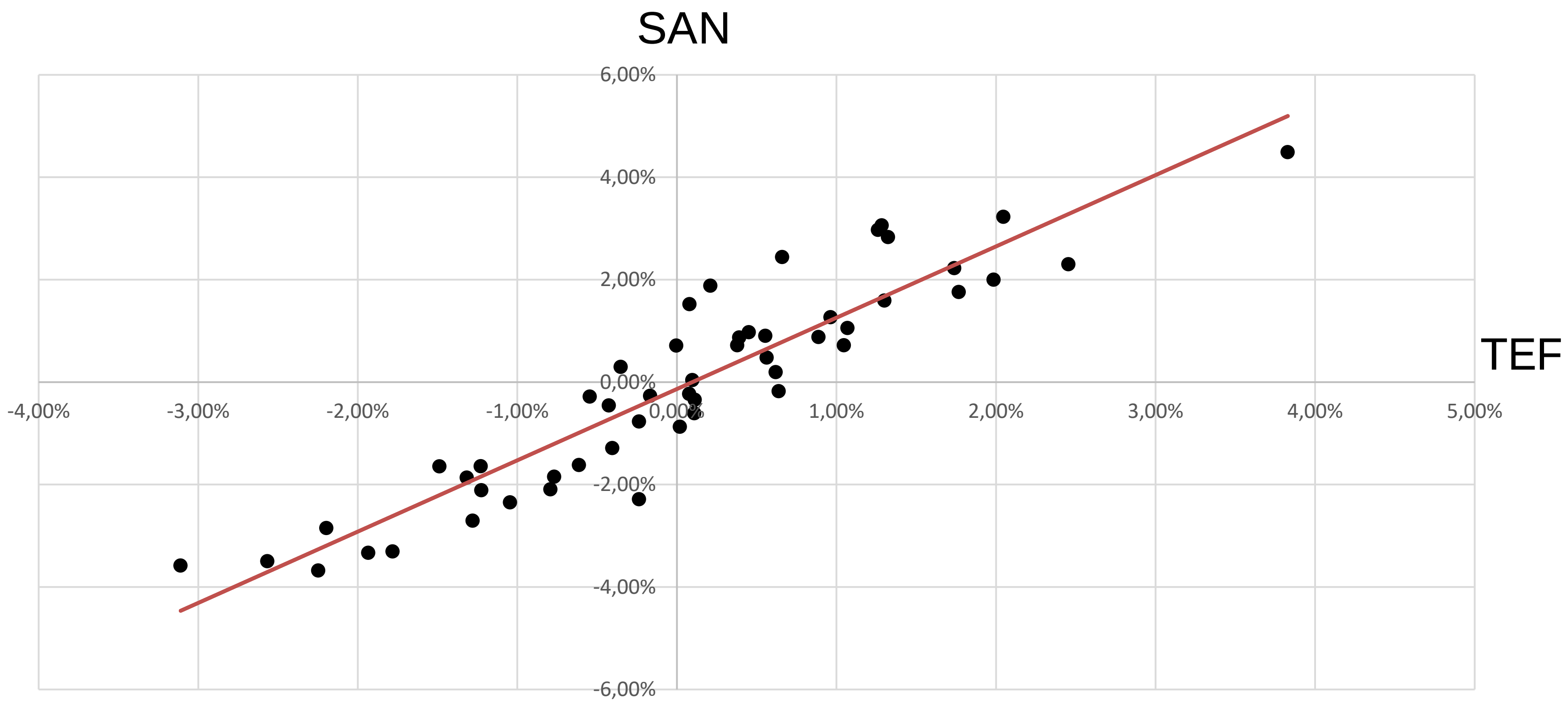
Ejercicio: Relación entre dos activos

- Para nuestro ejemplo, la correlación entre la acción de SAN e INDITEX es:

$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = \frac{0{,}00014}{0{,}018037 \cdot 0{,}011477} = 0{,}6987}$$

Relación entre dos activos financieros

Para los datos de nuestro ejercicio: $\rho_{SANTANDER,TELEF} = 0{,}82$



Relación entre dos activos financieros

- Por último, si elevamos al cuadrado el coeficiente de correlación obtenemos el denominado **coeficiente de determinación**, que nos dice que proporción de la variabilidad de los rendimientos de un activo puede asociarse a la variabilidad en los rendimientos del otro.

- Por ejemplo, si el coeficiente de correlación es +0,55 podemos afirmar que un 31,24% de la variabilidad del rendimiento del activo i (Banco Santander) puede ser asociada o explicada por los rendimientos del activo j (Inditex).

Beta de un activo financiero

Recordamos…

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

✓ ¿Cómo se calcula el **rendimiento medio** de un activo financiero?

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}}{N}$$

✓ ¿Cómo se calcula el **riesgo** de un activo financiero?

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N} (r_{i,t} - \bar{r})^2}{N}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

Relación entre los rendimientos de dos activos

- ✓ ¿Qué mide la **covarianza**?

- Supóngase que en un día determinado una acción proporciona un rendimiento por encima de su valor esperado. Si conociéramos de antemano que esto va a ocurrir, ¿qué implicaciones tendría ello respecto al rendimiento esperado para otra acción?

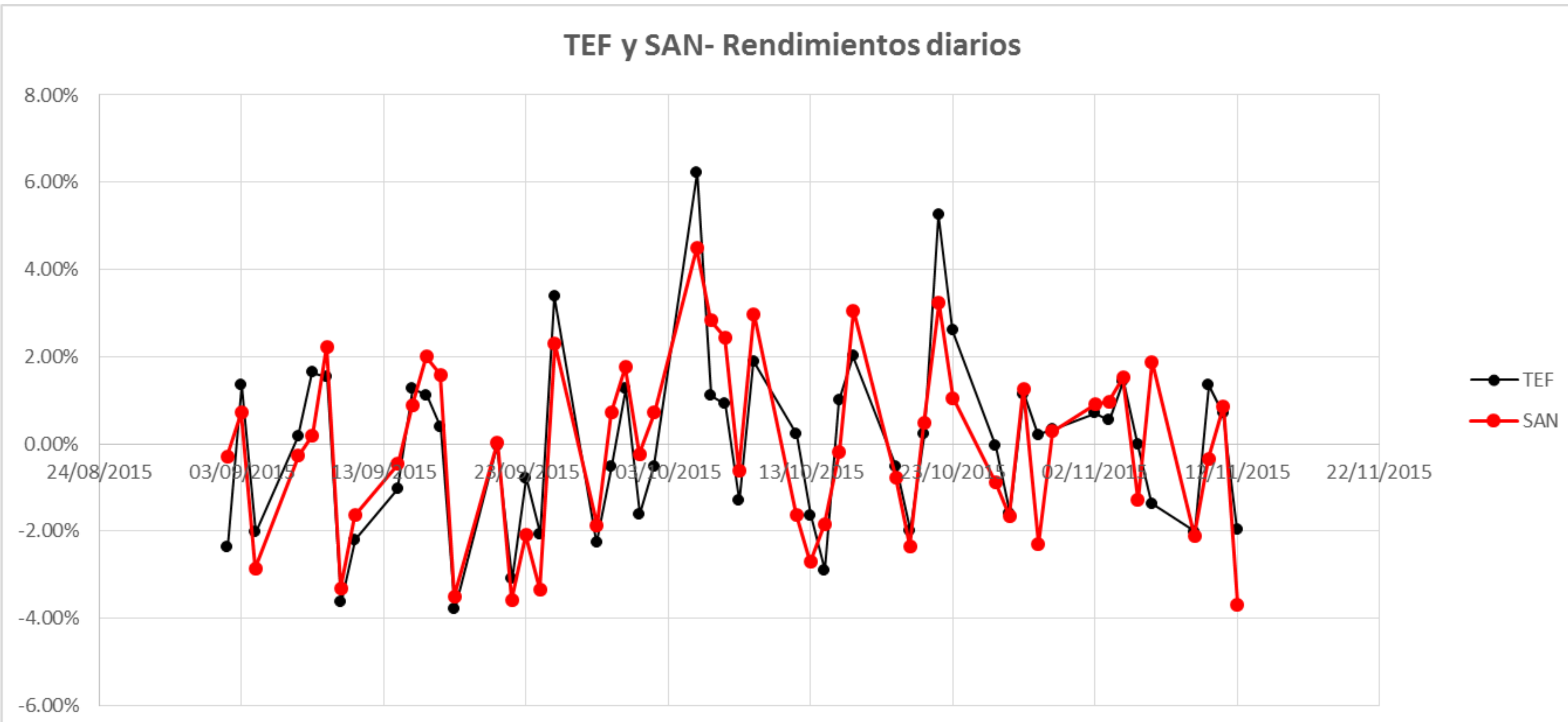
	Precio de cierre	
	TEF	SAN
01/09/2015	12.23	5.307
02/09/2015	11.94	5.292
03/09/2015	12.10	5.330
04/09/2015	11.86	5.178
07/09/2015	11.88	5.164
08/09/2015	12.07	5.174
09/09/2015	12.26	5.289
10/09/2015	11.81	5.114
11/09/2015	11.55	5.03
14/09/2015	11.43	5.007
15/09/2015	11.58	5.051
16/09/2015	11.71	5.152
17/09/2015	11.75	5.234
18/09/2015	11.31	5.051
21/09/2015	11.30	5.053
22/09/2015	10.95	4.872
23/09/2015	10.87	4.77
24/09/2015	10.64	4.611
25/09/2015	11.00	4.717
28/09/2015	10.75	4.629
29/09/2015	10.70	4.662
30/09/2015	10.83	4.744
01/10/2015	10.66	4.733
02/10/2015	10.60	4.767
05/10/2015	11.26	4.981
06/10/2015	11.39	5.122
07/10/2015	11.49	5.247
08/10/2015	11.34	5.215
09/10/2015	11.56	5.37
12/10/2015	11.58	5.283
13/10/2015	11.39	5.14
14/10/2015	11.06	5.045
15/10/2015	11.17	5.036
16/10/2015	11.40	5.19
19/10/2015	11.34	5.15
20/10/2015	11.11	5.029
21/10/2015	11.14	5.053
22/10/2015	11.72	5.216
23/10/2015	12.03	5.271
26/10/2015	12.02	5.225
27/10/2015	11.83	5.139

	Rendimientos	
	TEF	SAN
01/09/2015		
02/09/2015	-2.37%	-0.28%
03/09/2015	1.34%	0.72%
04/09/2015	-2.02%	-2.85%
07/09/2015	0.17%	-0.27%
08/09/2015	1.64%	0.19%
09/09/2015	1.53%	2.22%
10/09/2015	-3.63%	-3.31%
11/09/2015	-2.20%	-1.64%
14/09/2015	-1.04%	-0.46%
15/09/2015	1.27%	0.88%
16/09/2015	1.12%	2.00%
17/09/2015	0.38%	1.59%
18/09/2015	-3.79%	-3.50%
21/09/2015	-0.04%	0.04%
22/09/2015	-3.10%	-3.58%
23/09/2015	-0.78%	-2.09%
24/09/2015	-2.07%	-3.33%
25/09/2015	3.38%	2.30%
28/09/2015	-2.27%	-1.87%
29/09/2015	-0.51%	0.71%
30/09/2015	1.26%	1.76%
01/10/2015	-1.62%	-0.23%
02/10/2015	-0.52%	0.72%
05/10/2015	6.23%	4.49%
06/10/2015	1.11%	2.83%
07/10/2015	0.92%	2.44%
08/10/2015	-1.31%	-0.61%
09/10/2015	1.90%	2.97%
12/10/2015	0.22%	-1.62%
13/10/2015	-1.64%	-2.71%
14/10/2015	-2.90%	-1.85%
15/10/2015	0.99%	-0.18%
16/10/2015	2.01%	3.06%
19/10/2015	-0.53%	-0.77%
20/10/2015	-1.99%	-2.35%
21/10/2015	0.23%	0.48%
22/10/2015	5.25%	3.23%
23/10/2015	2.60%	1.05%
26/10/2015	-0.04%	-0.87%
27/10/2015	-1.58%	-1.65%

Rendimiento medio:

TEF=-0,03%

SAN= -0,08%


TEF y SAN- Rendimientos diarios
8.00%
6.00%
4.00%
2.00%
0.00%
-2.00%
-4.00%
-6.00%
24/08/2015
03/09/2015
13/09/2015
23/09/2015
03/10/2015
13/10/2015
23/10/2015
02/11/2015
12/11/2015
22/11/2015
TEF
SAN

Relación entre los rendimientos de dos activos

- Un estadístico que proporciona información sobre esta cuestión es la **covarianza** entre dos acciones.

$$\mathrm{Cov}\, r_A r_B = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(r_{A,t} - \bar{r}_A\right)\left(r_{B,t} - \bar{r}_B\right)}{N-1}$$

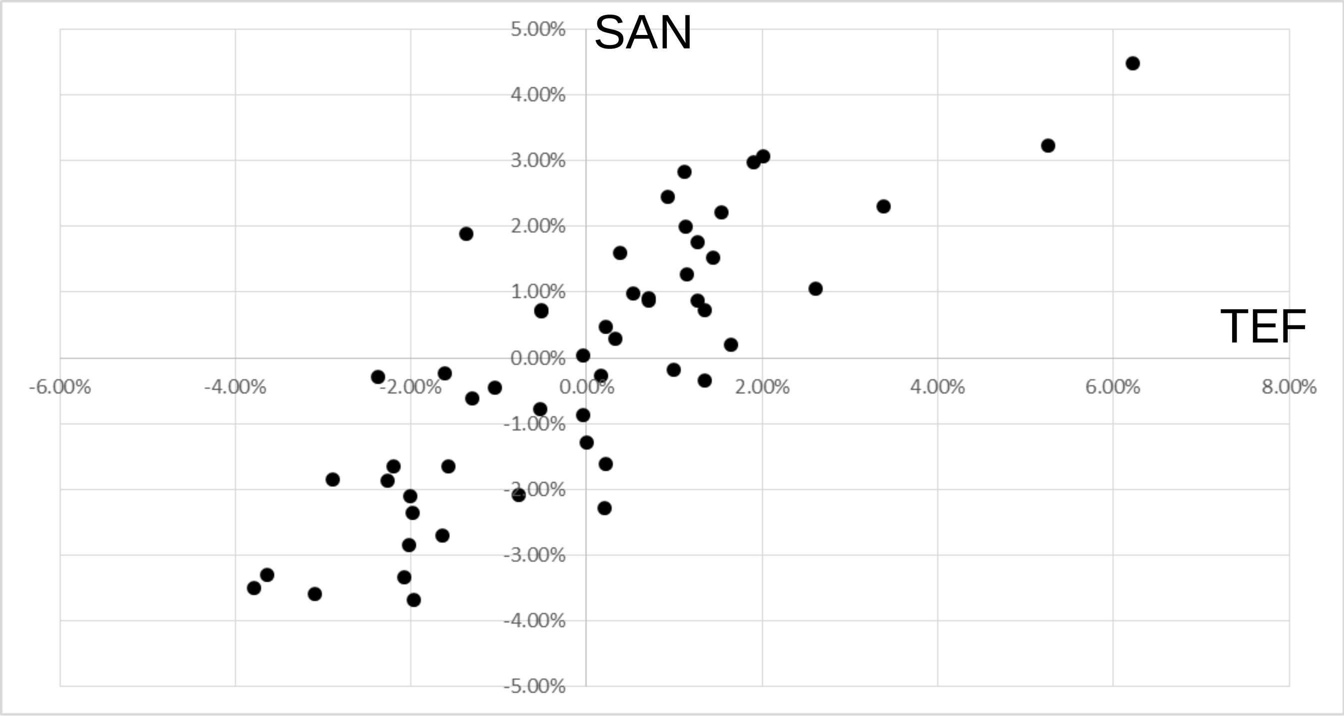
✓ Donde $\bar{r}$ son las rentabilidades medias del activo A y B respectivamente y se calculan mediante la media muestral.

✓ Para nuestro ejemplo, la covarianza entre la acción de TEF y SAN es:

$$\boxed{Cov_{\ TEF,SAN} = 0{,}0003411}$$

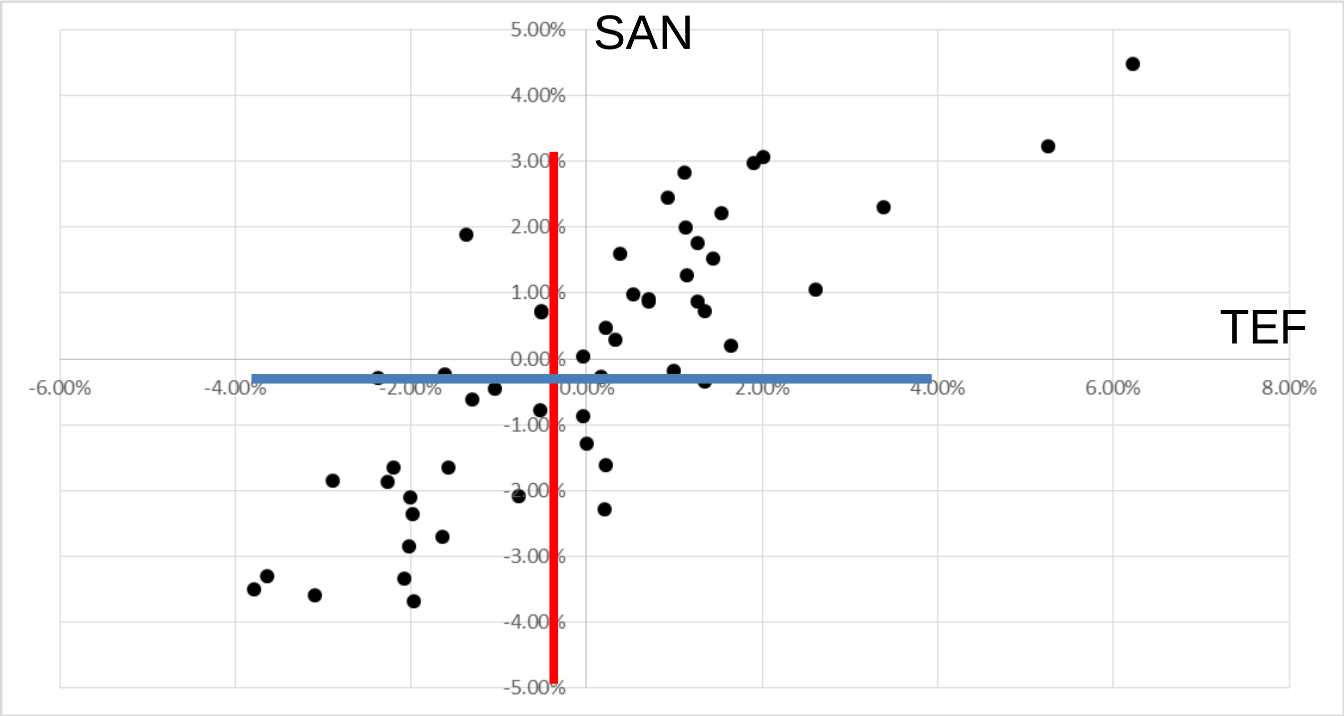
Relación entre los rendimientos de dos activos

¿Qué información proporciona la **covarianza**? En este caso, **en la medida en que se trata de un número positivo lo que está indicando es que cuando una acción proporciona un rendimiento por encima de su media, la otra tiende a hacer lo mismo.**



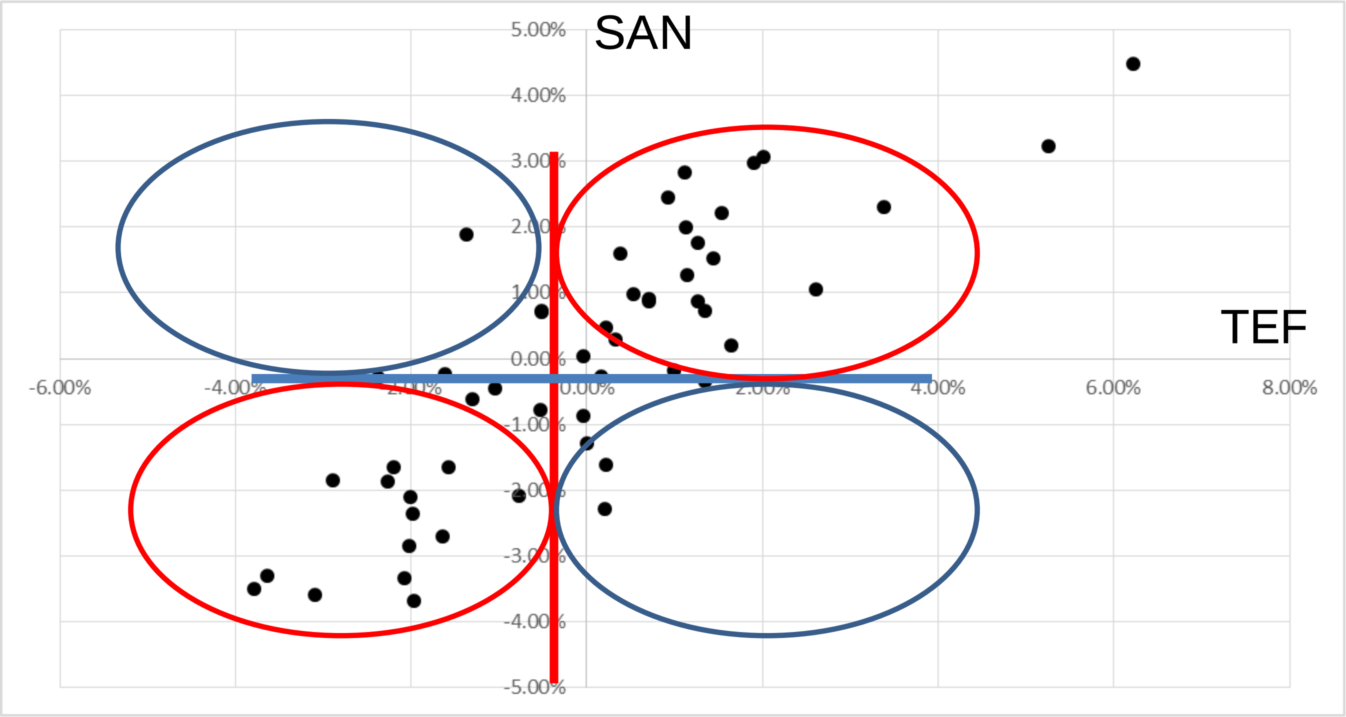
Relación entre los rendimientos de dos activos

¿Qué información proporciona la **covarianza**? En este caso, **en la medida en que se trata de un número positivo lo que está indicando es que cuando una acción proporciona un rendimiento por encima de su media, la otra tiende a hacer lo mismo.**



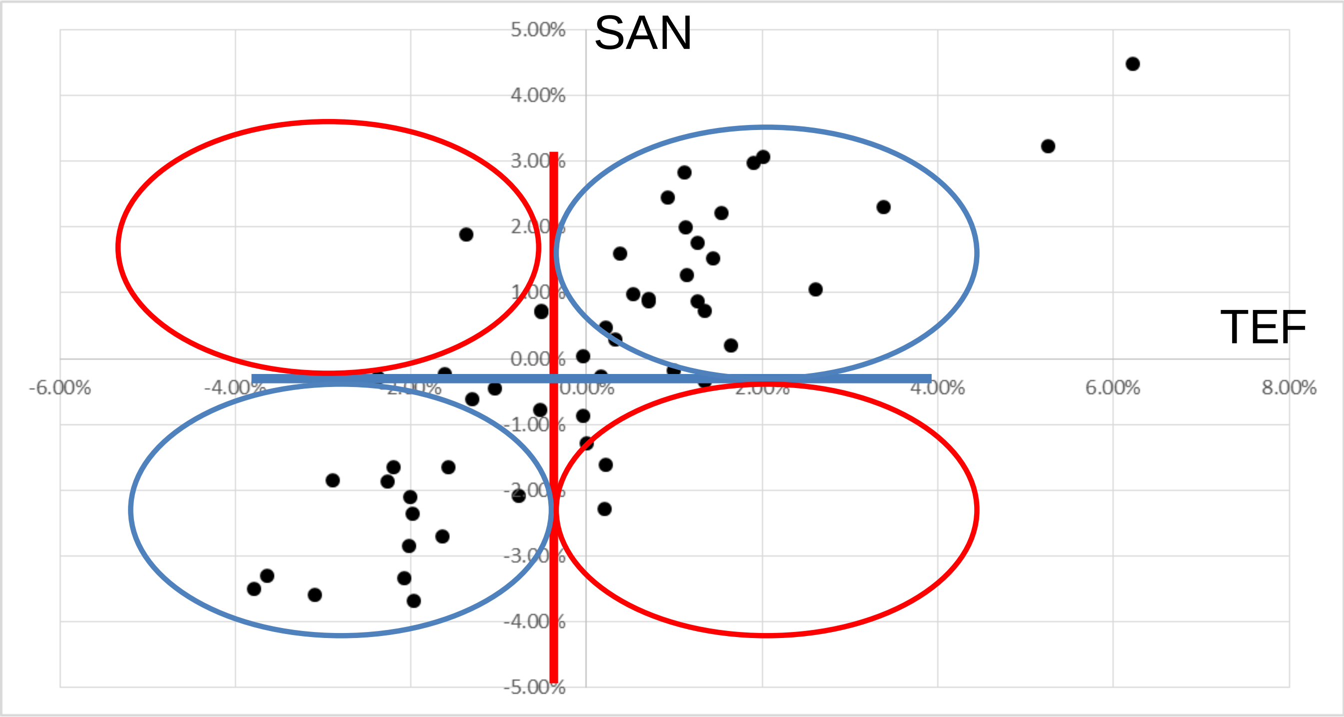
Relación entre los rendimientos de dos activos

Gráficamente una covarianza **positiva** indica que los rendimientos conjuntos tienden a situarse en los cuadrantes **I y III.**



Relación entre los rendimientos de dos activos

Si la covarianza entre los rendimientos de los activos A y B es **negativa**, la mayoría de las observaciones se sitúan en los cuadrantes **II y IV**. Así, **cuando el rendimiento de un activo se sitúa por encima de su media, el otro tiende a situarse por debajo de la suya**.



Relación entre los rendimientos de dos activos

- El conocimiento de la **covarianza** es esencial ya que es fundamental a la hora de determinar la **varianza** de una **cartera** de acciones.

- Sin embargo, como un número en sí mismo no permite describir la naturaleza de la relación entre los rendimientos de dos activos. No obstante, podemos **estandarizar la covarianza** y obtener un mejor descriptor de dicha relación: **el coeficiente de correlación**.

- En principio la covarianza es un **número no acotado** que puede tomar valores desde menos hasta más infinito, pero es posible acotarlo dividiendo por el producto de las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos,

$$\rho_{A,B} = \frac{Cov(r_A, r_B)}{\sigma(r_A)\cdot\sigma(r_B)}$$

El número resultante es denominado **coeficiente de correlación** y puede tomar valores entre **–1 y 1**.

Recordamos…

✓ ¿Qué mide el **coeficiente de correlación**?

- El coeficiente de correlación es la medida estadística que mide la relación entre dos variables, en nuestro caso acciones (acción TEF y acción SAN) . Este valor puede tomar valores entre -1 y 1.

- Si $\rho_{A,B} = 1$ indica que las acciones están perfectamente relacionadas. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra también lo hará. Correlación perfecta y positiva.

- Si $\rho_{A,B} = -1$ indica que las acciones están perfectamente relacionadas. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra bajará. Correlación perfecta y negativa.

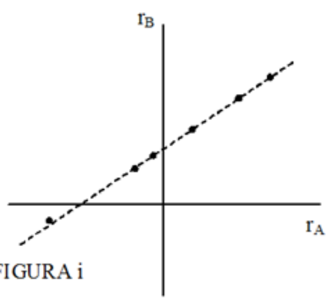


FIGURA i

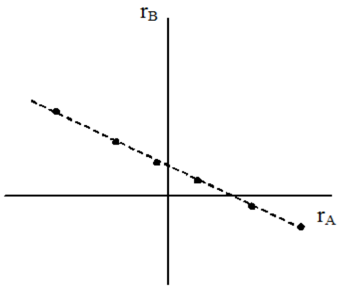
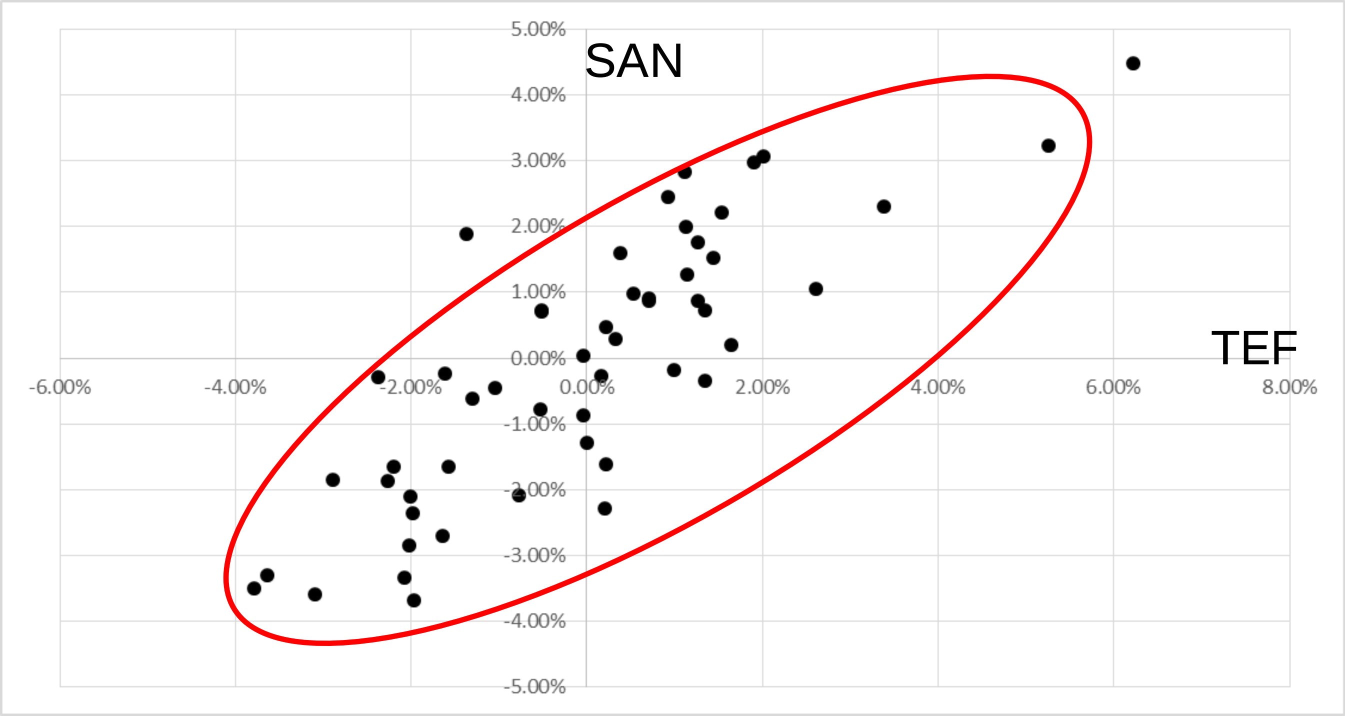


FIGURA iii

Relación entre los rendimientos de dos activos

$$Correlacion_{TEF,SAN} = 0{,}8298$$



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

LA CARTERA DE MERCADO

- Hasta el momento, hemos hablado de la relación existente entre los rendimientos de dos activos financieros. A continuación analizamos algunos estadísticos que permitan describir la relación entre los rendimientos de un activo y lo que vamos a llamar la **cartera de mercado**.

- Esta consiste en "***todos y cada uno de los activos arriesgados que existen en el sistema económico internacional y contiene cada activo en una proporción igual a la que dicho activo tiene respecto al valor de mercado de todos los activos***".

La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

LA CARTERA DE MERCADO- IBEX 35

Analicemos la **relación existente** entre una acción (**SAN**) y la cartera de mercado (**IBEX-35**). Supongamos que observamos los rendimientos del activo y de la cartera de mercado desde el septiembre hasta el momento:

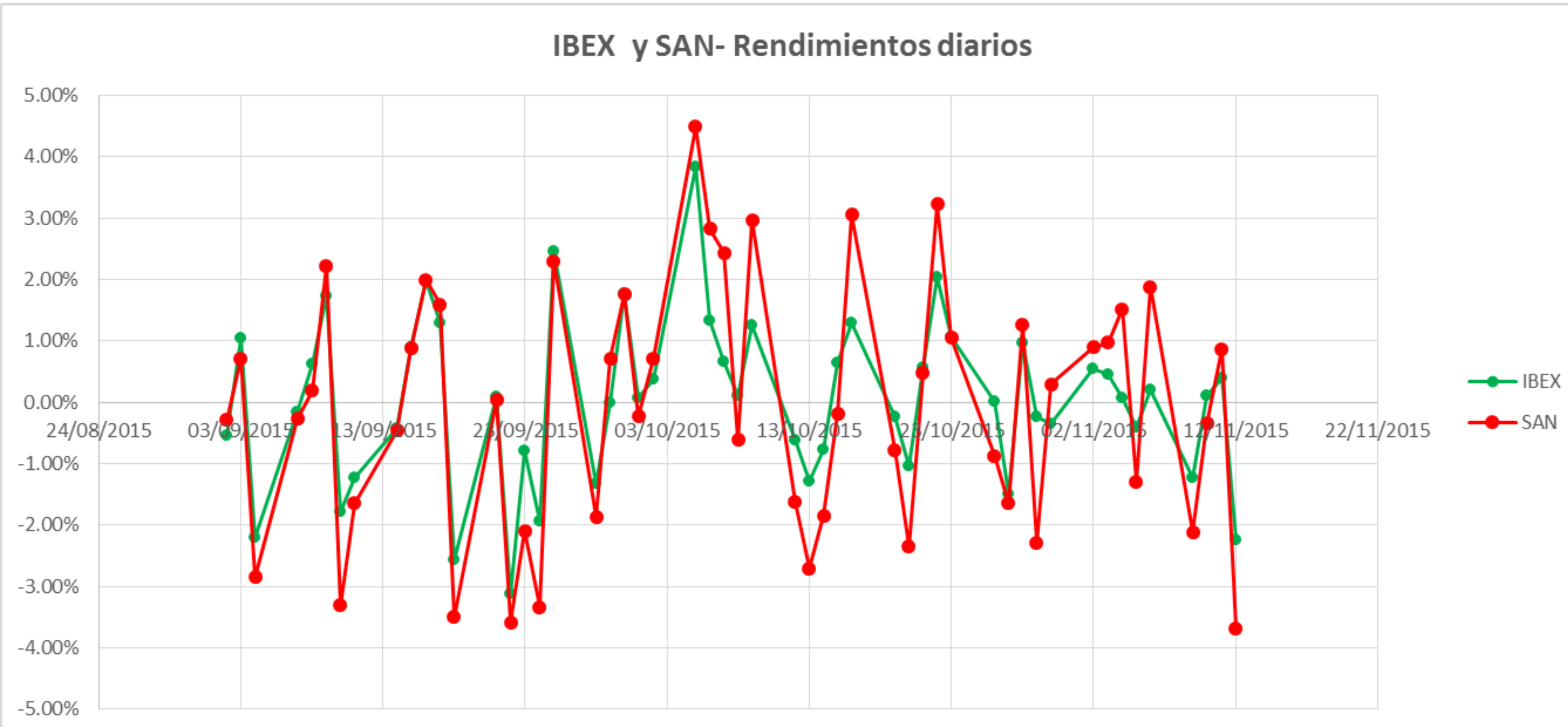
	Precio de cierre	
	IBEX	SAN
01/09/2015	9.992,80	5,307
02/09/2015	9.938,30	5,292
03/09/2015	10.042,40	5,330
04/09/2015	9.821,80	5,178
07/09/2015	9.805,40	5,164
08/09/2015	9.866,20	5,174
09/09/2015	10.037,80	5,289
10/09/2015	9.859,00	5,114
11/09/2015	9.737,90	5,03
14/09/2015	9.696,40	5,007
15/09/2015	9.782,50	5,051
16/09/2015	9.976,80	5,152
17/09/2015	10.106,60	5,234
18/09/2015	9.847,20	5,051
21/09/2015	9.856,80	5,053
22/09/2015	9.550,20	4,872
23/09/2015	9.474,60	4,77
24/09/2015	9.291,40	4,611
25/09/2015	9.519,50	4,717
28/09/2015	9.394,20	4,629
29/09/2015	9.393,90	4,662
30/09/2015	9.559,90	4,744
01/10/2015	9.567,30	4,733
02/10/2015	9.603,60	4,767
05/10/2015	9.971,30	4,981
06/10/2015	10.103,30	5,122
07/10/2015	10.170,00	5,247
08/10/2015	10.181,20	5,215
09/10/2015	10.309,60	5,37
12/10/2015	10.246,40	5,283
13/10/2015	10.115,30	5,14
14/10/2015	10.037,60	5,045
15/10/2015	10.101,70	5,036
16/10/2015	10.231,50	5,19
19/10/2015	10.207,30	5,15
20/10/2015	10.100,60	5,029
21/10/2015	10.157,50	5,053
22/10/2015	10.365,40	5,216

	Rendimientos	
01/09/2015	IBEX	SAN
02/09/2015	-0,55%	-0,28%
03/09/2015	1,05%	0,72%
04/09/2015	-2,20%	-2,85%
07/09/2015	-0,17%	-0,27%
08/09/2015	0,62%	0,19%
09/09/2015	1,74%	2,22%
10/09/2015	-1,78%	-3,31%
11/09/2015	-1,23%	-1,64%
14/09/2015	-0,43%	-0,46%
15/09/2015	0,89%	0,88%
16/09/2015	1,99%	2,00%
17/09/2015	1,30%	1,59%
18/09/2015	-2,57%	-3,50%
21/09/2015	0,10%	0,04%
22/09/2015	-3,11%	-3,58%
23/09/2015	-0,79%	-2,09%
24/09/2015	-1,93%	-3,33%
25/09/2015	2,45%	2,30%
28/09/2015	-1,32%	-1,87%
29/09/2015	0,00%	0,71%
30/09/2015	1,77%	1,76%
01/10/2015	0,08%	-0,23%
02/10/2015	0,38%	0,72%
05/10/2015	3,83%	4,49%
06/10/2015	1,32%	2,83%
07/10/2015	0,66%	2,44%
08/10/2015	0,11%	-0,61%
09/10/2015	1,26%	2,97%
12/10/2015	-0,61%	-1,62%
13/10/2015	-1,28%	-2,71%
14/10/2015	-0,77%	-1,85%
15/10/2015	0,64%	-0,18%
16/10/2015	1,28%	3,06%
19/10/2015	-0,24%	-0,77%
20/10/2015	-1,05%	-2,35%
21/10/2015	0,56%	0,48%
22/10/2015	2,05%	3,23%

Rendimiento medio:

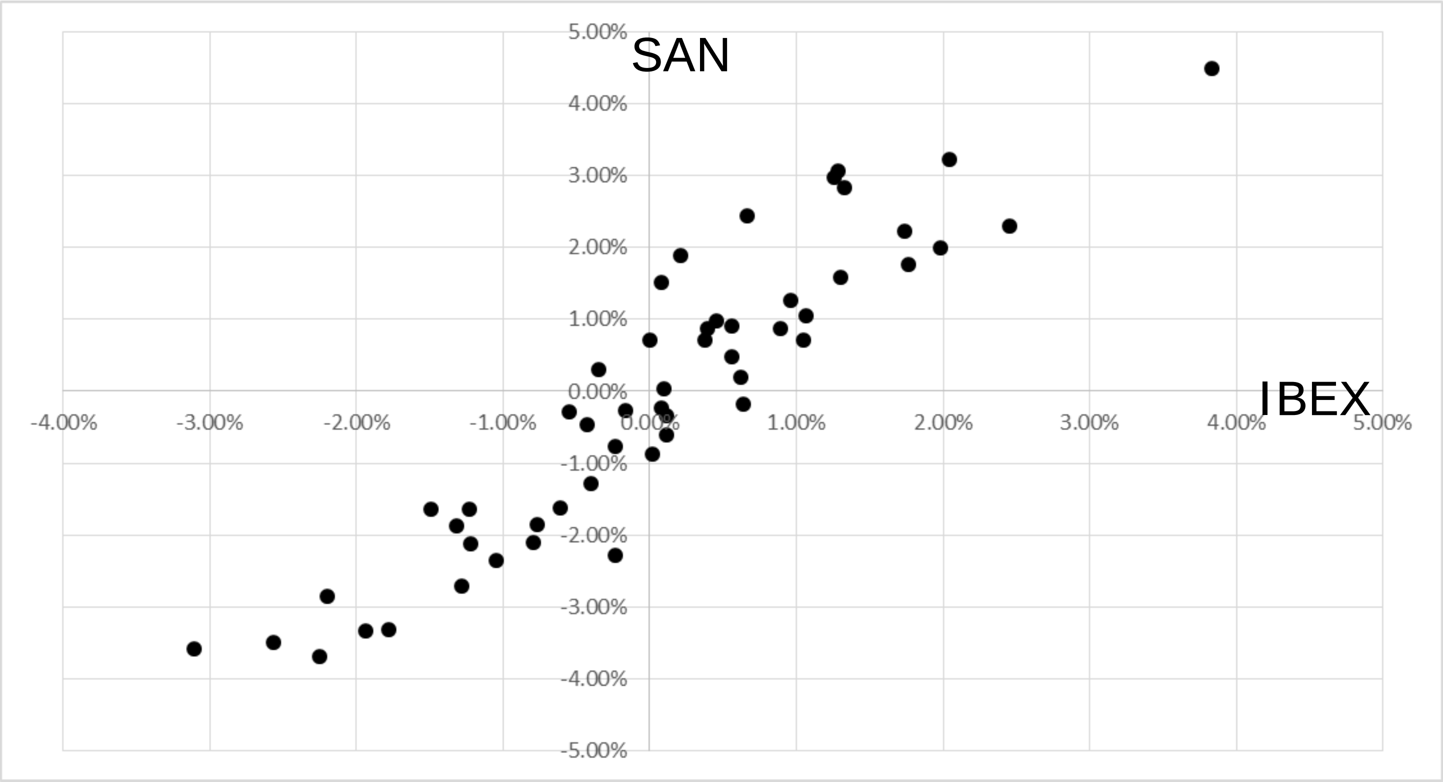
IBEX=0,04%

SAN= -0,08%


IBEX y SAN- Rendimientos diarios
5.00%
4.00%
3.00%
2.00%
1.00%
0.00%
-1.00%
-2.00%
-3.00%
-4.00%
-5.00%
24/08/2015
03/09/2015
13/09/2015
23/09/2015
03/10/2015
13/10/2015
23/10/2015
02/11/2015
12/11/2015
22/11/2015
IBEX
SAN

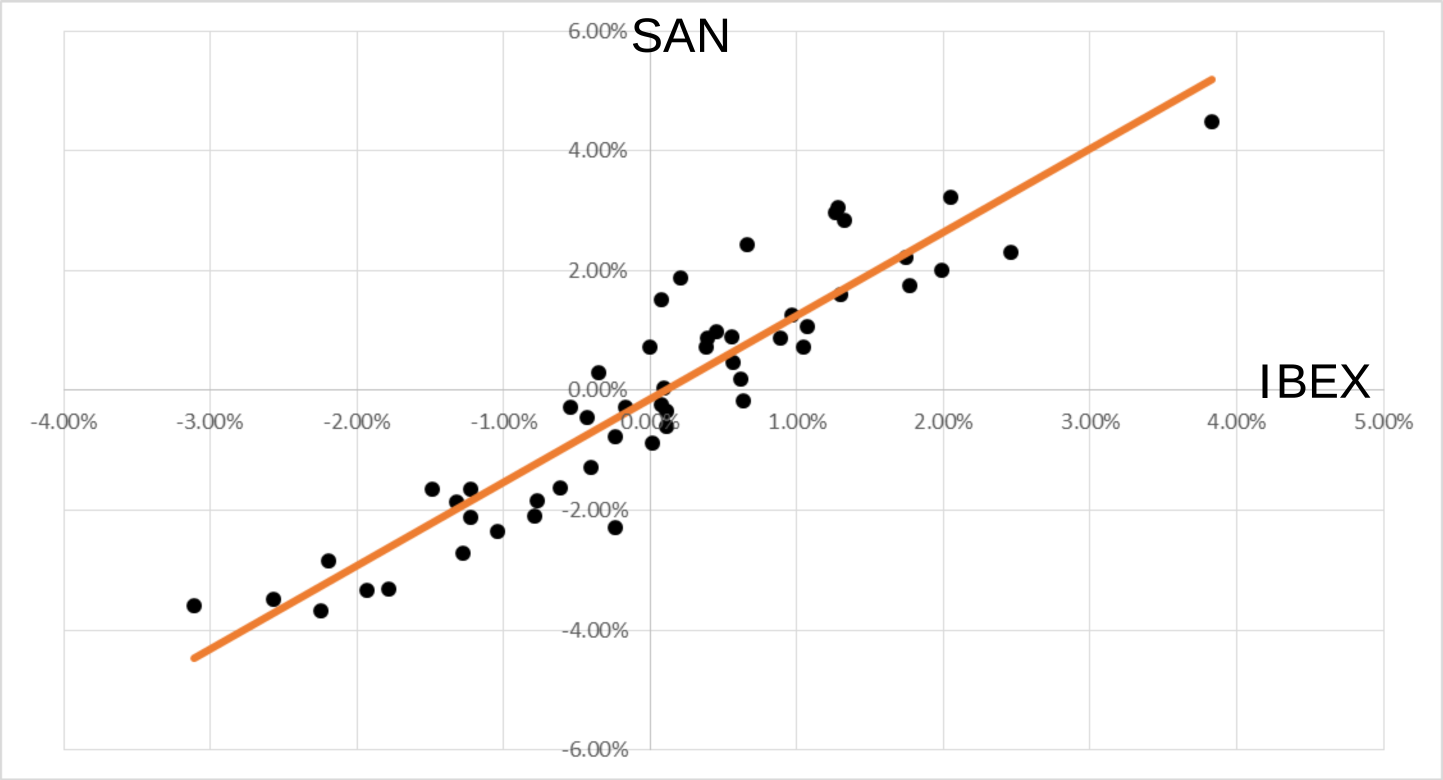
La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

Si **dibujamos** estos puntos obtenemos la siguiente figura:



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

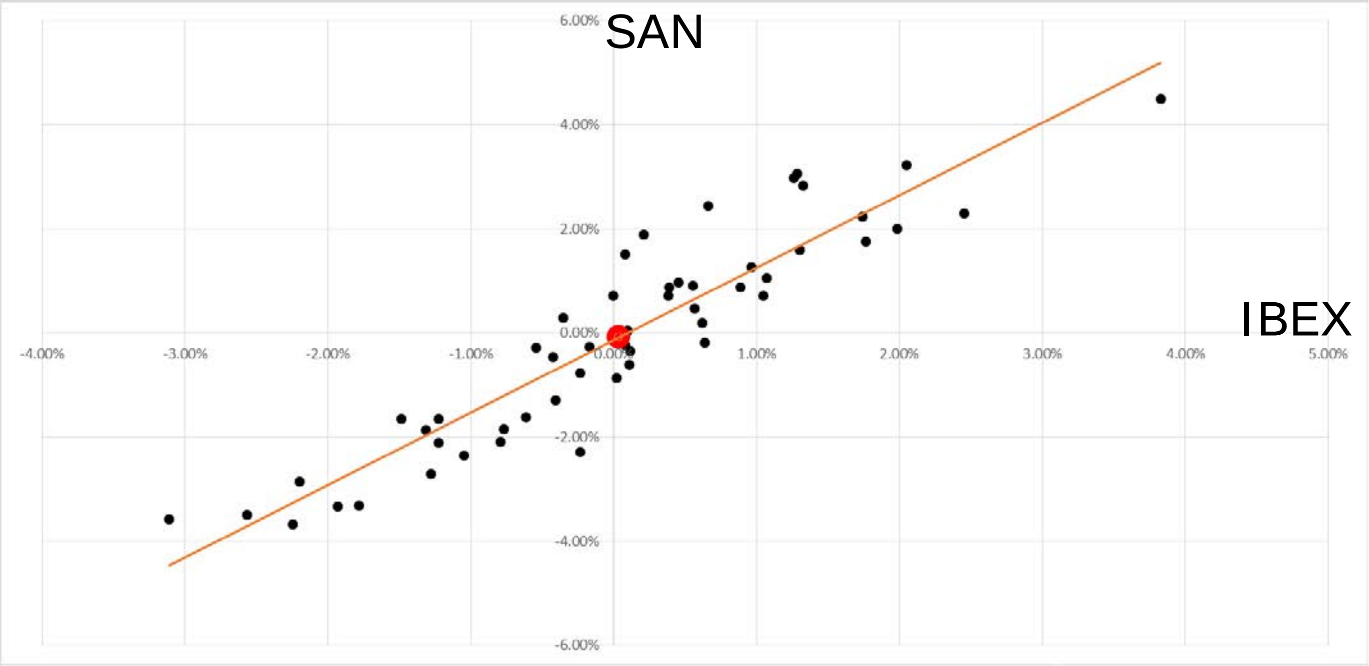
Sobre ellos aparece la **recta de regresión** que permite **describir** la **relación existente** entre el activo financiero y la cartera de mercado. Dicha línea recibe el nombre de línea característica del activo J en este caso, SAN.



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

- Dicha línea característica **muestra el rendimiento esperado del SAN dado un determinado nivel del rendimiento de la cartera de mercado, IBEX 35**.

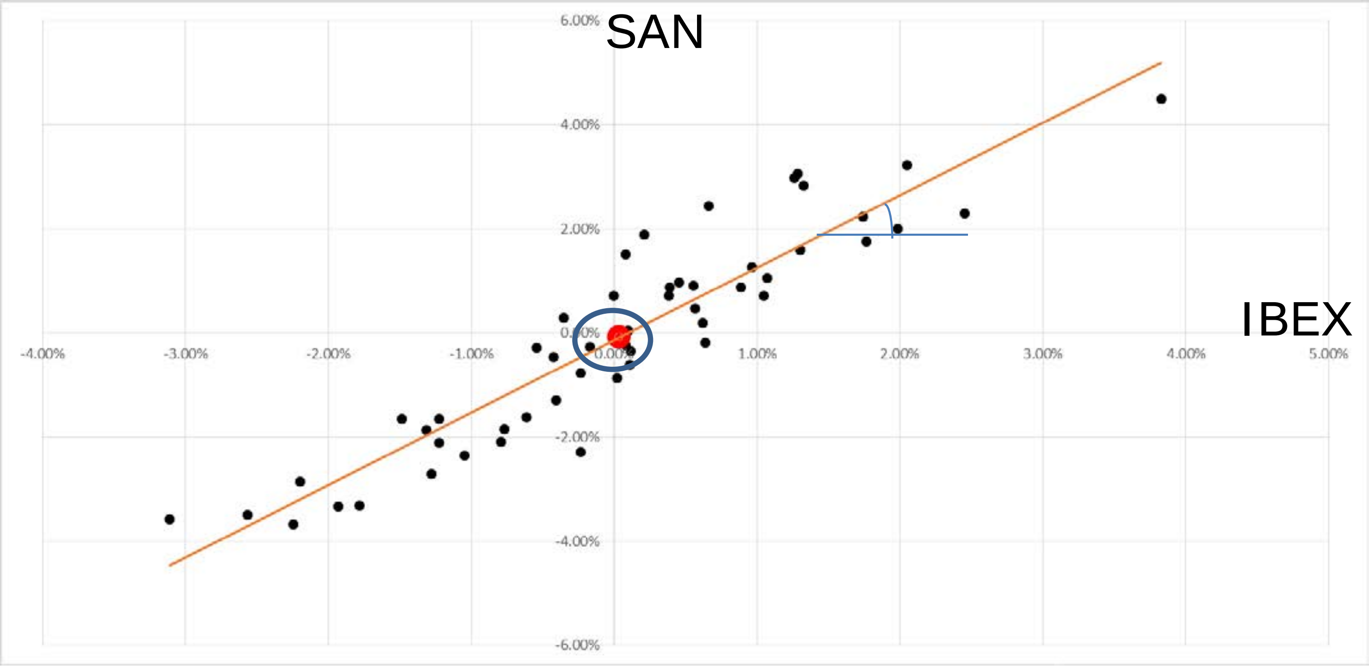
- Así en la figura anterior, si la cartera de mercado produce un rendimiento del 0,04%, el rendimiento esperado del activo SAN sería del -0,08% (punto rojo en la figura).



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

- En la medida en que la línea característica es una línea recta, ésta puede venir perfectamente descrita por su **pendiente** y por el **punto de corte con el eje** de ordenadas.

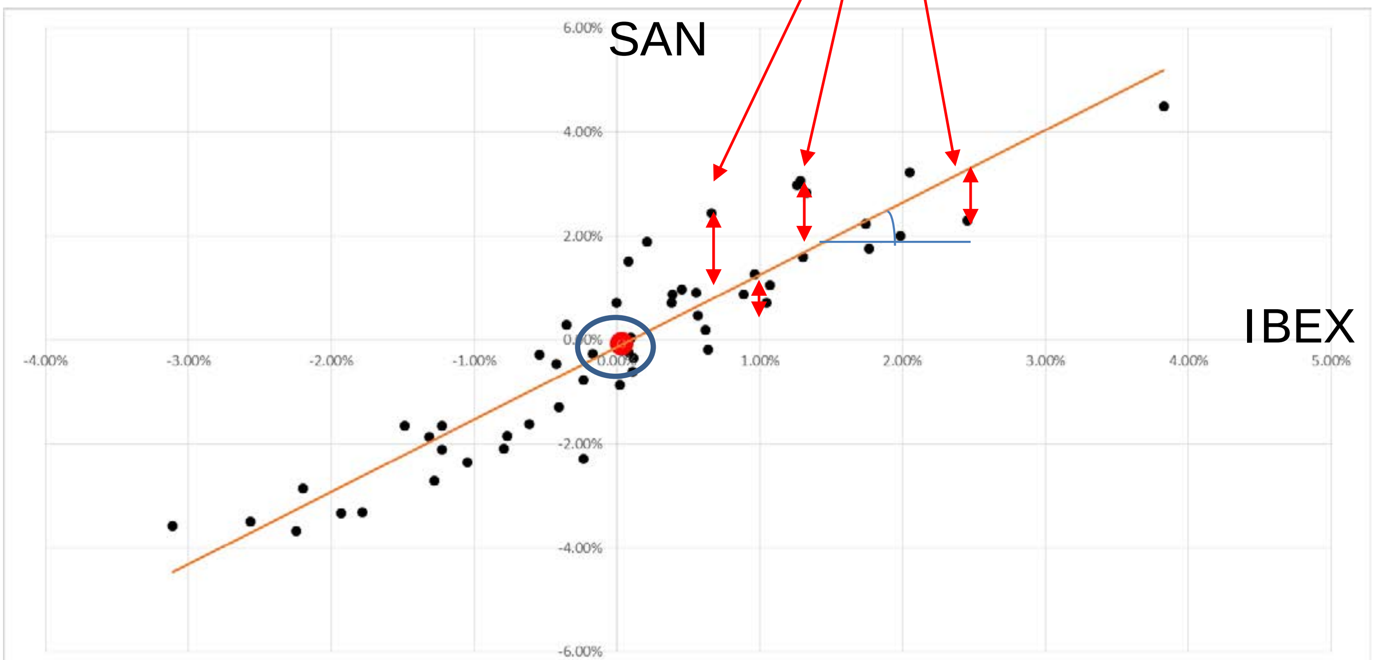
- La **pendiente de la línea característica es denominada habitualmente como el factor beta del activo SAN o β**. Nos referiremos al punto de corte con el eje vertical por el símbolo *A*.



BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- Si se pretende explicar los rendimientos del activo SAN en función de los rendimientos de la cartera de mercado, IBEX propondríamos el siguiente **modelo de regresión lineal simple**, donde llamamos a los rendimientos del activo SAN mediante r_j y los de la cartera de mercado como r_M.

$$r_j = A_j + \beta_j r_M + \varepsilon_j$$



BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

- Realizando la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos o desviaciones, se llega a las ecuaciones normales y despejando éstas se llega a las fórmulas para calcular directamente el **factor** β y el **punto de corte**:

$$\hat{\beta}_j = \frac{Cov\, r_j r_M}{\sigma^2_{r_M}} \qquad , \qquad \hat{A}_j = \bar{r}_j - \hat{\beta}_j \bar{r}_M$$

- Donde $Cov\, r_j r_M$ es la covarianza entre los rendimientos del activo j y la cartera de mercado y $\sigma^2_{r_M}$ es la varianza de los rendimientos de la cartera de mercado.

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- Datos que necesitamos:

✓ Covarianza del SAN con el IBEX=0,0002544
✓ Varianza del IBEX=0,00018278

¿Como calculamos la beta del SAN? Dividiendo la covarianza que hay entre el SAN y el IBEX entre la varianza del IBEX.

$$\beta_{SAN} = \frac{Covarianza\ (SAN, IBEX)}{Varianza\ IBEX} = \frac{0{,}0002544}{0{,}00018278} = 1{,}3919$$

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	-0.00136208	0.00107308	-1.26932112	0.21020322
IBEX	1.39193991	0.08011458	17.3743648	7.8873E-23

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

- El factor beta es un indicador del grado en el que dicho activo (SAN) responde a cambios en el rendimiento de la cartera de mercado (IBEX).

- El factor β para el activo SAN es 1,39. Esto indica que si supiéramos que el rendimiento de la cartera de mercado va a ser superior en un 1% a su rendimiento esperado, entonces esperaríamos un incremento en el rendimiento del SAN del 1,39% sobre su media.

- Es una **medida de la sensibilidad de la rentabilidad de un activo financiero ante cambios en la rentabilidad de una cartera de referencia**. La beta nos indica cómo variará la rentabilidad del activo financiero si lo comparamos con la evolución de una cartera o índice de referencia. Habitualmente, la cartera o índice de referencia **corresponderá al índice bursátil más representativo** donde se negocia el activo financiero. Así por ejemplo, para acciones negociadas en la Bolsa española se suele tomar como índice de referencia el **IBEX-35** y para acciones cotizadas en la Bolsa de Nueva York se puede utilizar el S&P 500.

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

Su rango de posibles valores no está acotado. No obstante, existen unos **niveles típicos de beta de un activo financiero** y que podemos agrupar en los siguientes:

- ✓ **Beta igual a uno**: en este caso, la rentabilidad del activo financiero se va a **comportar igual que el índice de referencia**. Si por ejemplo, el índice de referencia fuese el IBEX, y éste sube un 7% entonces el activo financiero en cuestión también debería ascender un 7%. Pero, cuidado, porque la réplica del movimiento también se produciría en el caso de que el índice cayera.

- ✓ **Beta mayor que uno**: en esta situación, el activo financiero va a mostrar una **mayor variabilidad que el índice** de referencia y, por tanto, amplificará los movimientos del mercado, tanto al alza como a la baja. Por ejemplo, para una beta igual a 1,5, si el índice bajara un 5%, el activo descenderá un 7,5%.

- ✓ **Beta menor que uno**: en este caso, el activo financiero en cuestión es de **corte defensivo** y presenta una **menor variabilidad que el índice** de referencia. Para el mismo ejemplo que el caso anterior, pero con una beta de 0,5, el activo financiero sólo caería la mitad, esto es, un 2,5%.

- Por otro lado, los valores de las betas también quedan **condicionados por el período temporal que se fije para su cálculo**. En función del horizonte temporal de la inversión, se puede fijar como referencia uno de ellos.

- Por último, es **bastante improbable** que la beta de un activo financiero tome **valores negativos** y, por tanto, muestre un **comportamiento inverso** al del mercado en el que se negocian. Esta situación se asimilaría a la contratación de una especie de seguro, ante posibles movimientos adversos del mercado. En la realidad, pueden existir este tipo de **activos "refugio"** como así ha ocurrido y sigue sucediendo con la inversión en determinados metales preciosos como el oro; si bien se ha de tener en cuenta que no se trata de activos financieros. Estas inversiones muestran su carácter "refugio" en toda su plenitud, sobre todo en las épocas de crisis financieras.

EJERCICIO: CALCULO Y ANALISIS DE LA BETA DE UN CONJUNTO DE ACTIVOS FINANCIEROS

✓ En la siguiente tabla se tienen las covarianzas de cada una de estas acciones con el IBEX 35:

ABENGOA	INDITEX	GAS NATURAL	MEDIASET	REPSOL
0,0001100	0,0001965	0,0001860	0,0001692	0,0002702

BANKIA	ACERINOX	ENDESA	BBVA	TELEFONICA
0,0001500	0,0003019	0,0000910	0,0001829	0,0002431

✓ Y sabiendo que la varianza del **IBEX=0,00018278**

➢ **Calcula la beta de cada uno de los activos anteriores, clasifica la beta según en grupos según los valores que obtengas y explica en cada caso la interpretación de dicho coeficiente beta.**

EJERCICIO: CALCULO Y ANALISIS DE LA BETA DE UN CONJUNTO DE ACTIVOS FINANCIEROS

Beta >1	Beta <1	Beta=1
INDITEX	ABENGOA	BBVA
1,075104908	0,60191077	1,000850897
GAS NATURAL	MEDIASET	
1,017822345	0,92579696	
REPSOL	BANKIA	
1,478210997	0,82055666	
ACERINOX	ENDESA	
1,651611384	0,49797517	
TELEFONICA		
1,330240803		

Beta de un activo financiero

Recordamos…

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

- ✓ ¿Cómo se calcula el **rendimiento medio** de un activo financiero?

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{i,t}}{N}$$

- ✓ ¿Cómo se calcula el **riesgo** de un activo financiero?

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N} (r_{i,t} - \bar{r})^2}{N}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

Relación entre los rendimientos de dos activos

- ✓ ¿Qué mide la **covarianza**?

- Supóngase que en un día determinado una acción proporciona un rendimiento por encima de su valor esperado. Si conociéramos de antemano que esto va a ocurrir, ¿qué implicaciones tendría ello respecto al rendimiento esperado para otra acción?

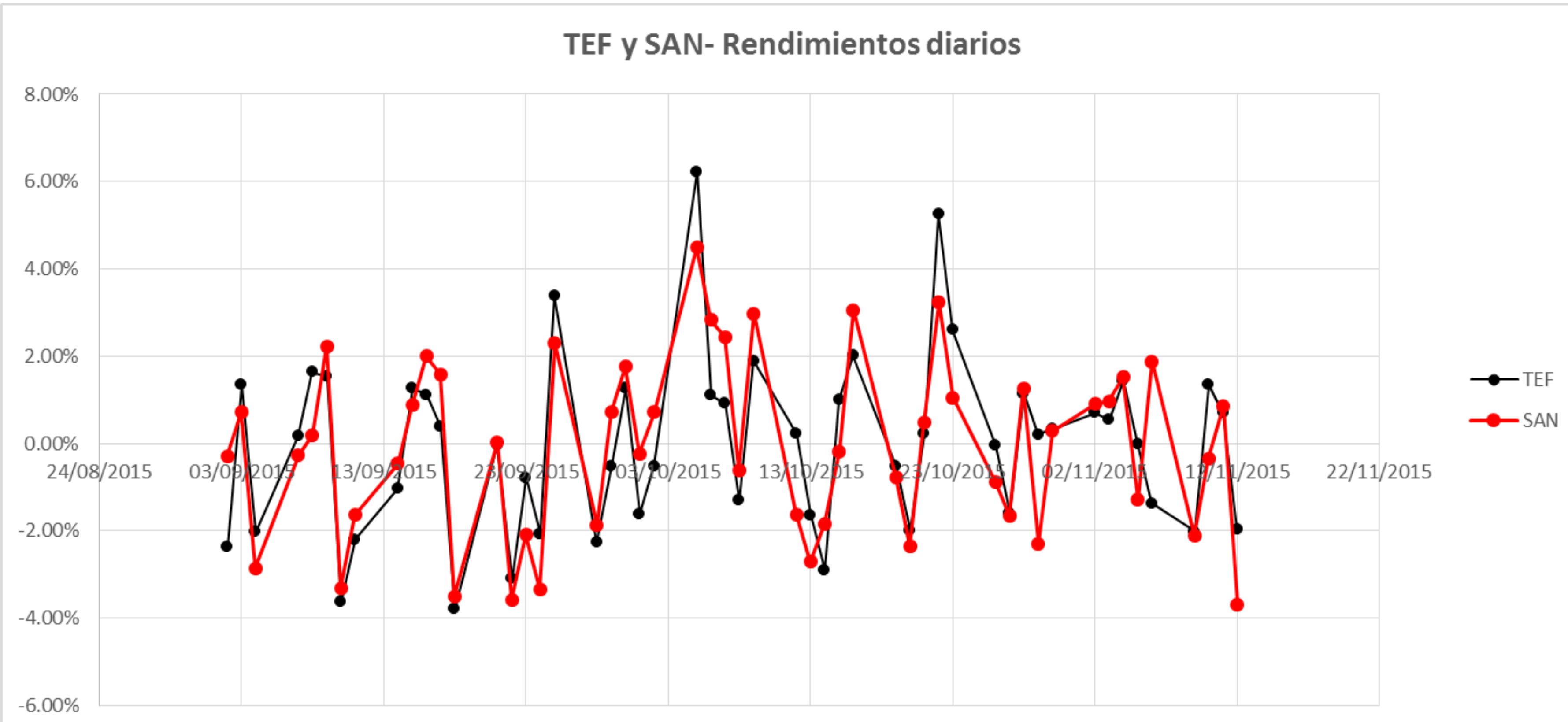
	Precio de cierre	
	TEF	SAN
01/09/2015	12.23	5.307
02/09/2015	11.94	5.292
03/09/2015	12.10	5.330
04/09/2015	11.86	5.178
07/09/2015	11.88	5.164
08/09/2015	12.07	5.174
09/09/2015	12.26	5.289
10/09/2015	11.81	5.114
11/09/2015	11.55	5.03
14/09/2015	11.43	5.007
15/09/2015	11.58	5.051
16/09/2015	11.71	5.152
17/09/2015	11.75	5.234
18/09/2015	11.31	5.051
21/09/2015	11.30	5.053
22/09/2015	10.95	4.872
23/09/2015	10.87	4.77
24/09/2015	10.64	4.611
25/09/2015	11.00	4.717
28/09/2015	10.75	4.629
29/09/2015	10.70	4.662
30/09/2015	10.83	4.744
01/10/2015	10.66	4.733
02/10/2015	10.60	4.767
05/10/2015	11.26	4.981
06/10/2015	11.39	5.122
07/10/2015	11.49	5.247
08/10/2015	11.34	5.215
09/10/2015	11.56	5.37
12/10/2015	11.58	5.283
13/10/2015	11.39	5.14
14/10/2015	11.06	5.045
15/10/2015	11.17	5.036
16/10/2015	11.40	5.19
19/10/2015	11.34	5.15
20/10/2015	11.11	5.029
21/10/2015	11.14	5.053
22/10/2015	11.72	5.216
23/10/2015	12.03	5.271
26/10/2015	12.02	5.225
27/10/2015	11.83	5.139

	Rendimientos	
	TEF	SAN
01/09/2015		
02/09/2015	-2.37%	-0.28%
03/09/2015	1.34%	0.72%
04/09/2015	-2.02%	-2.85%
07/09/2015	0.17%	-0.27%
08/09/2015	1.64%	0.19%
09/09/2015	1.53%	2.22%
10/09/2015	-3.63%	-3.31%
11/09/2015	-2.20%	-1.64%
14/09/2015	-1.04%	-0.46%
15/09/2015	1.27%	0.88%
16/09/2015	1.12%	2.00%
17/09/2015	0.38%	1.59%
18/09/2015	-3.79%	-3.50%
21/09/2015	-0.04%	0.04%
22/09/2015	-3.10%	-3.58%
23/09/2015	-0.78%	-2.09%
24/09/2015	-2.07%	-3.33%
25/09/2015	3.38%	2.30%
28/09/2015	-2.27%	-1.87%
29/09/2015	-0.51%	0.71%
30/09/2015	1.26%	1.76%
01/10/2015	-1.62%	-0.23%
02/10/2015	-0.52%	0.72%
05/10/2015	6.23%	4.49%
06/10/2015	1.11%	2.83%
07/10/2015	0.92%	2.44%
08/10/2015	-1.31%	-0.61%
09/10/2015	1.90%	2.97%
12/10/2015	0.22%	-1.62%
13/10/2015	-1.64%	-2.71%
14/10/2015	-2.90%	-1.85%
15/10/2015	0.99%	-0.18%
16/10/2015	2.01%	3.06%
19/10/2015	-0.53%	-0.77%
20/10/2015	-1.99%	-2.35%
21/10/2015	0.23%	0.48%
22/10/2015	5.25%	3.23%
23/10/2015	2.60%	1.05%
26/10/2015	-0.04%	-0.87%
27/10/2015	-1.58%	-1.65%

Rendimiento medio:

TEF=-0,03%

SAN= -0,08%


TEF y SAN- Rendimientos diarios
8.00%
6.00%
4.00%
2.00%
0.00%
-2.00%
-4.00%
-6.00%
24/08/2015
03/09/2015
13/09/2015
23/09/2015
03/10/2015
13/10/2015
23/10/2015
02/11/2015
12/11/2015
22/11/2015
TEF
SAN

Relación entre los rendimientos de dos activos

- Un estadístico que proporciona información sobre esta cuestión es la **covarianza** entre dos acciones.

$$\mathrm{Cov}\; r_A r_B = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(r_{A,t} - \bar{r}_A\right)\left(r_{B,t} - \bar{r}_B\right)}{N-1}$$

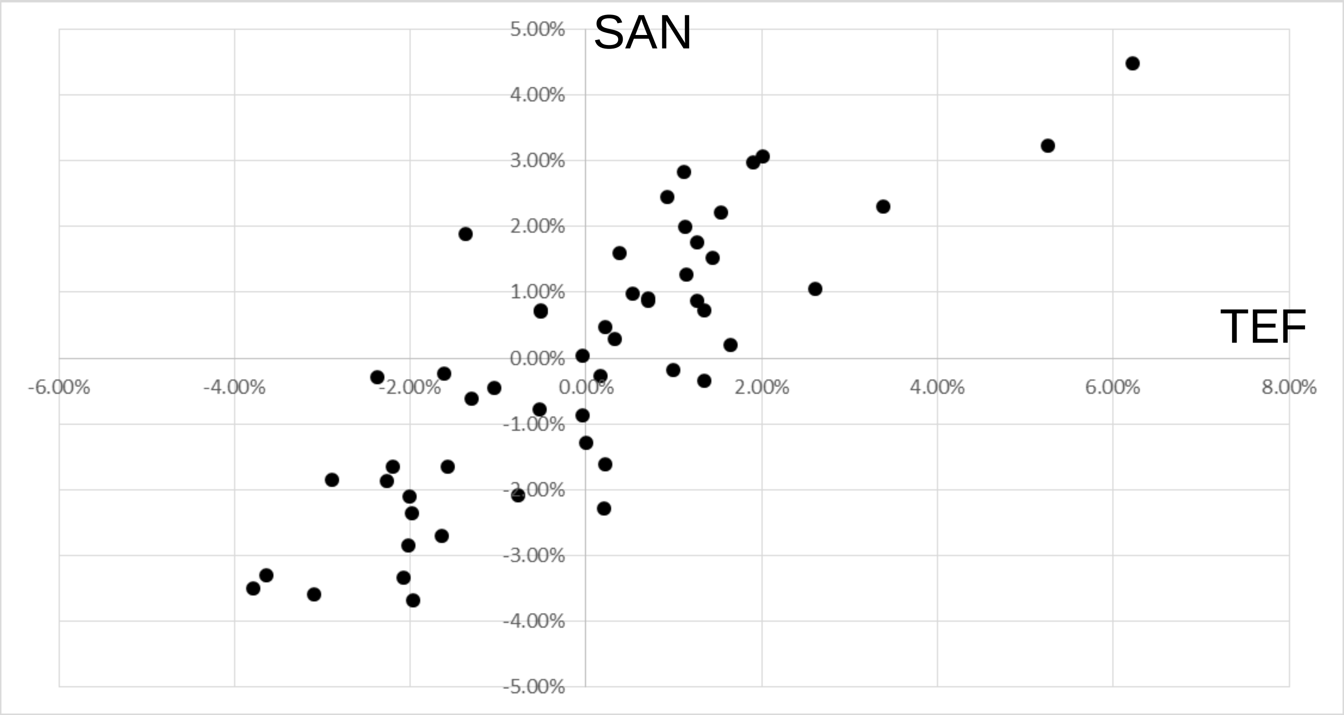
✓ Donde $\bar{r}$ son las rentabilidades medias del activo A y B respectivamente y se calculan mediante la media muestral.

✓ Para nuestro ejemplo, la covarianza entre la acción de TEF y SAN es:

$$\boxed{Cov_{\;TEF,SAN} = 0{,}0003411}$$

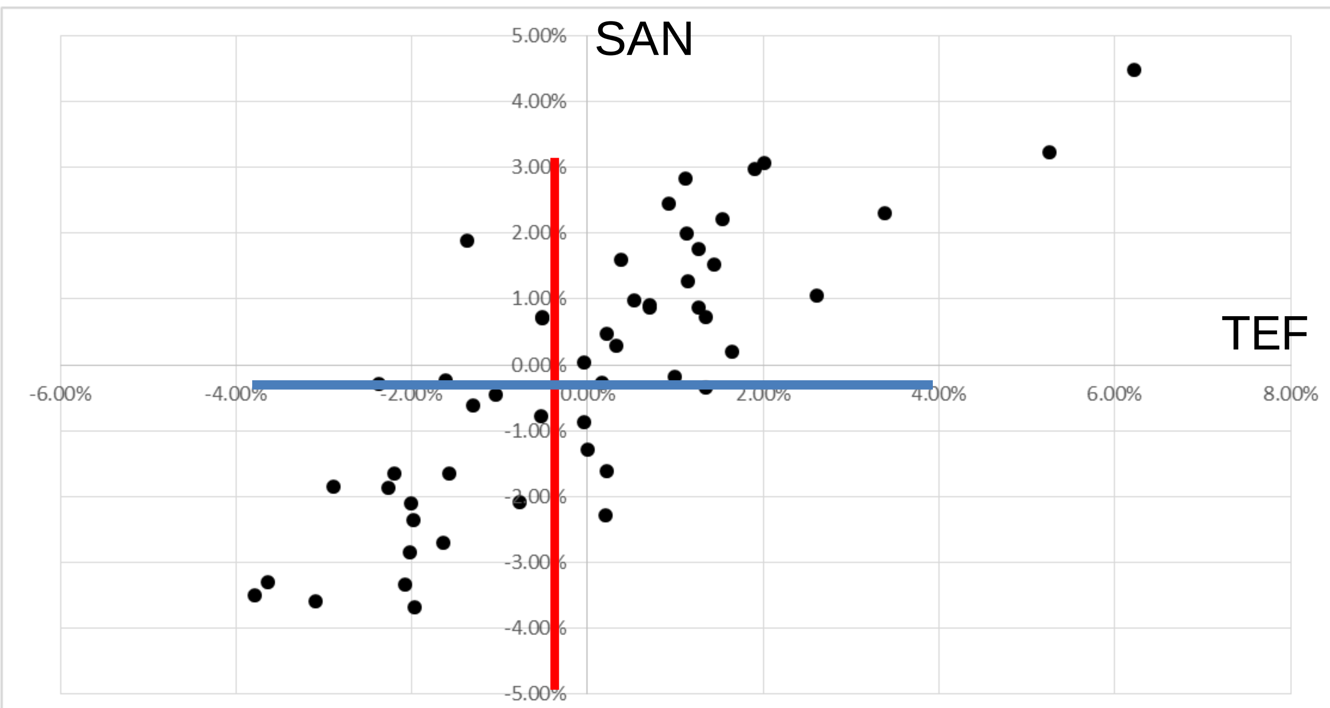
Relación entre los rendimientos de dos activos

¿Qué información proporciona la **covarianza**? En este caso, **en la medida en que se trata de un número positivo lo que está indicando es que cuando una acción proporciona un rendimiento por encima de su media, la otra tiende a hacer lo mismo.**



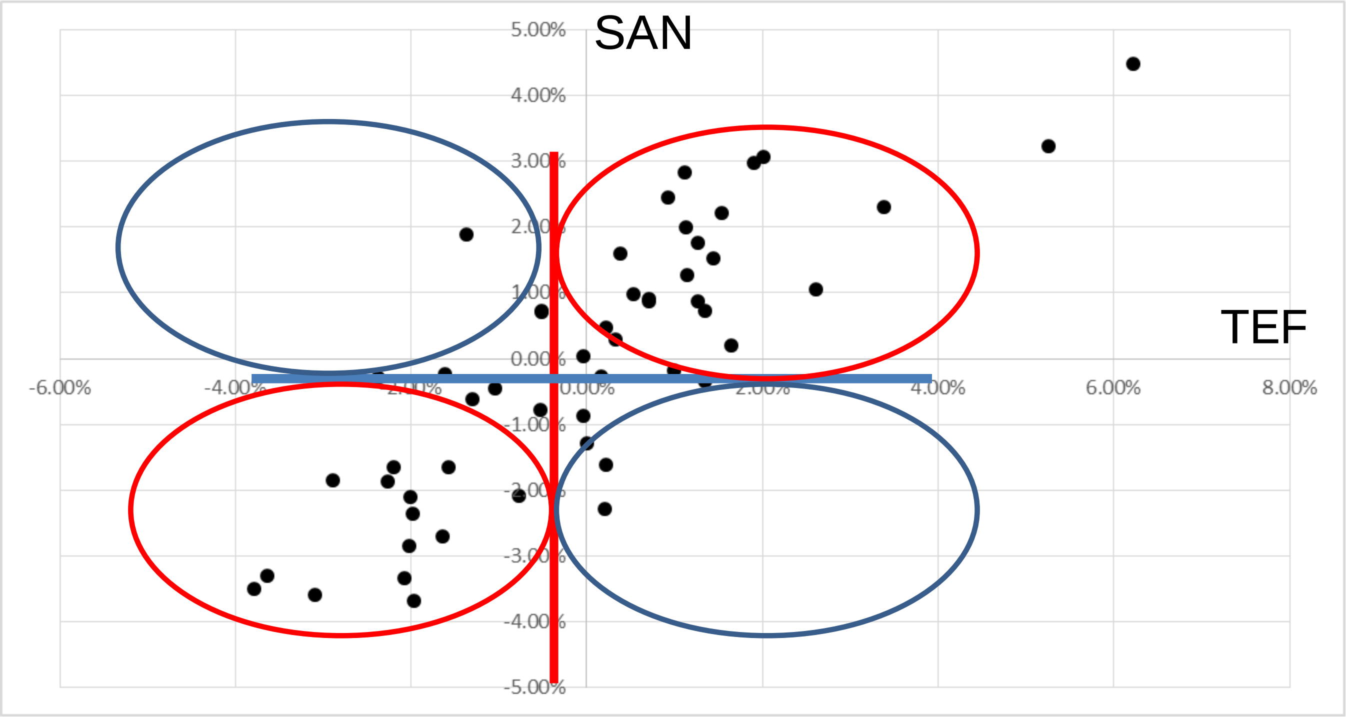
Relación entre los rendimientos de dos activos

¿Qué información proporciona la **covarianza**? En este caso, **en la medida en que se trata de un número positivo lo que está indicando es que cuando una acción proporciona un rendimiento por encima de su media, la otra tiende a hacer lo mismo.**



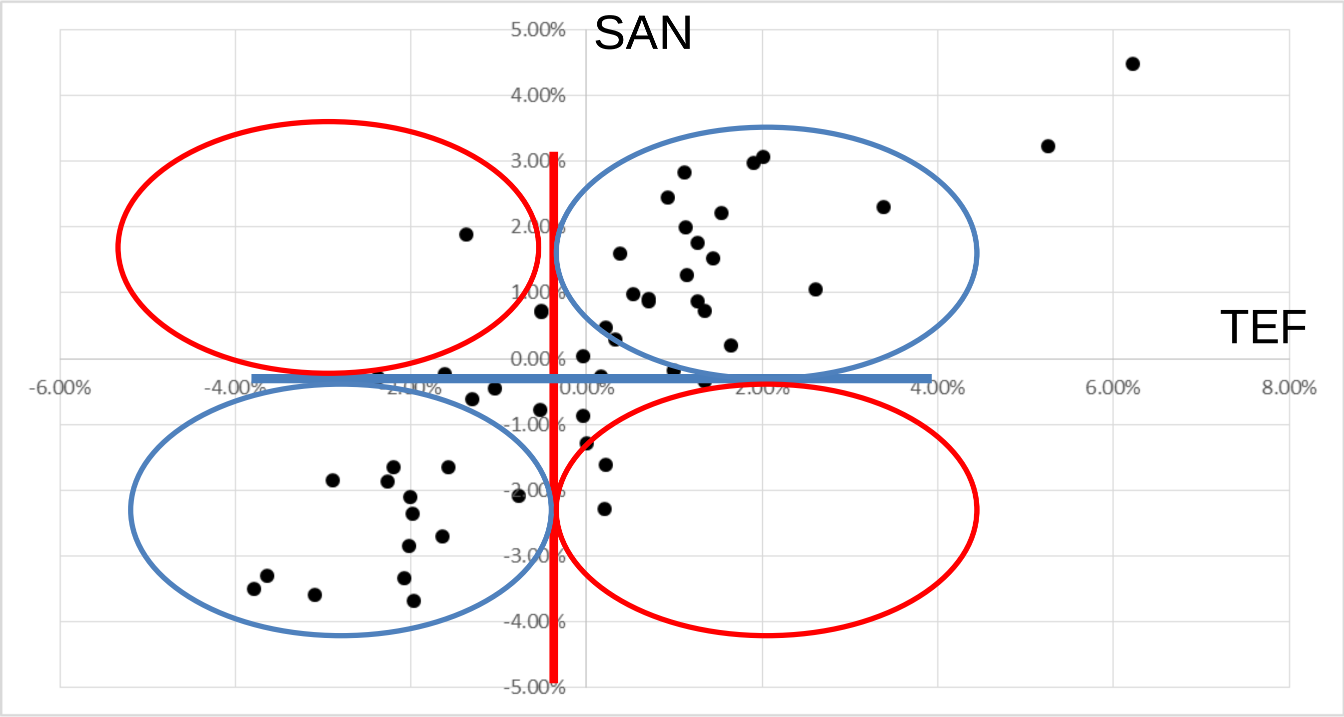
Relación entre los rendimientos de dos activos

Gráficamente una covarianza **positiva** indica que los rendimientos conjuntos tienden a situarse en los cuadrantes **I y III.**



Relación entre los rendimientos de dos activos

Si la covarianza entre los rendimientos de los activos A y B es **negativa**, la mayoría de las observaciones se sitúan en los cuadrantes **II y IV**. Así, **cuando el rendimiento de un activo se sitúa por encima de su media, el otro tiende a situarse por debajo de la suya**.



Relación entre los rendimientos de dos activos

- El conocimiento de la **covarianza** es esencial ya que es fundamental a la hora de determinar la **varianza** de una **cartera** de acciones.

- Sin embargo, como un número en sí mismo no permite describir la naturaleza de la relación entre los rendimientos de dos activos. No obstante, podemos **estandarizar la covarianza** y obtener un mejor descriptor de dicha relación: **el coeficiente de correlación**.

- En principio la covarianza es un **número no acotado** que puede tomar valores desde menos hasta más infinito, pero es posible acotarlo dividiendo por el producto de las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos,

$$\rho_{A,B} = \frac{Cov(r_A, r_B)}{\sigma(r_A)\cdot\sigma(r_B)}$$

El número resultante es denominado **coeficiente de correlación** y puede tomar valores entre **–1 y 1**.

Recordamos…

✓ ¿Qué mide el **coeficiente de correlación**?

- El coeficiente de correlación es la medida estadística que mide la relación entre dos variables, en nuestro caso acciones (acción TEF y acción SAN) . Este valor puede tomar valores entre -1 y 1.

- Si $\rho_{A,B} = 1$ indica que las acciones están perfectamente relacionadas. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra también lo hará. Correlación perfecta y positiva.

- Si $\rho_{A,B} = -1$ indica que las acciones están perfectamente relacionadas. Si el valor de una acción sube, el valor de la otra bajará. Correlación perfecta y negativa.

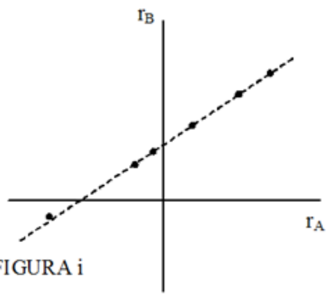


FIGURA i

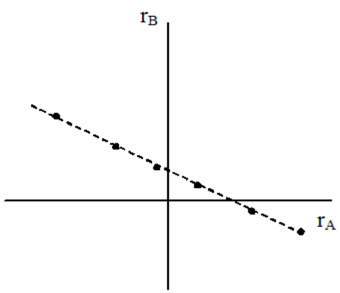
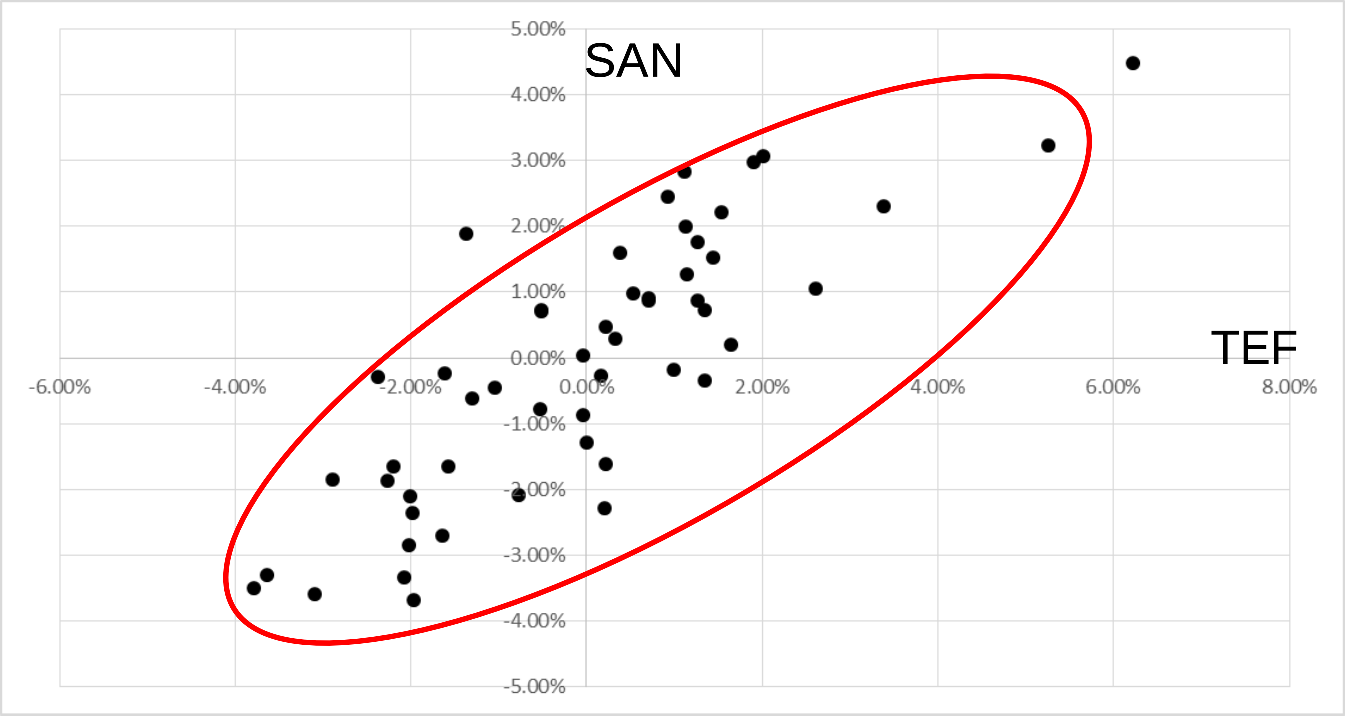


FIGURA iii

Relación entre los rendimientos de dos activos

$$\boxed{Correlacion_{\ TEF,SAN} = 0{,}8298}$$



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

LA CARTERA DE MERCADO

- Hasta el momento, hemos hablado de la relación existente entre los rendimientos de dos activos financieros. A continuación analizamos algunos estadísticos que permitan describir la relación entre los rendimientos de un activo y lo que vamos a llamar la **cartera de mercado**.

- Esta consiste en "***todos y cada uno de los activos arriesgados que existen en el sistema económico internacional y contiene cada activo en una proporción igual a la que dicho activo tiene respecto al valor de mercado de todos los activos***".

La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

LA CARTERA DE MERCADO- IBEX 35

Analicemos la **relación existente** entre una acción (**SAN**) y la cartera de mercado (**IBEX-35**). Supongamos que observamos los rendimientos del activo y de la cartera de mercado desde el septiembre hasta el momento:

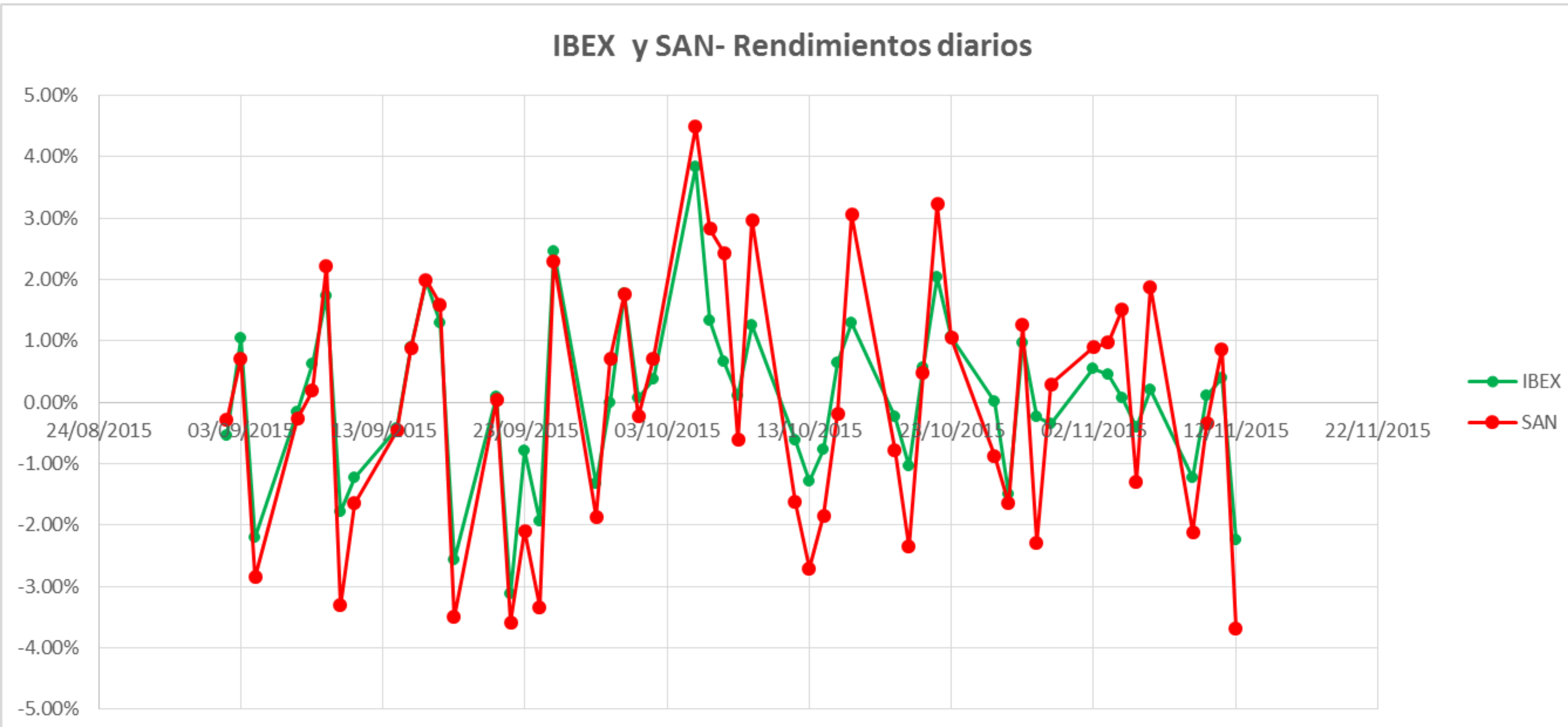
	Precio de cierre	
	IBEX	SAN
01/09/2015	9.992,80	5,307
02/09/2015	9.938,30	5,292
03/09/2015	10.042,40	5,330
04/09/2015	9.821,80	5,178
07/09/2015	9.805,40	5,164
08/09/2015	9.866,20	5,174
09/09/2015	10.037,80	5,289
10/09/2015	9.859,00	5,114
11/09/2015	9.737,90	5,03
14/09/2015	9.696,40	5,007
15/09/2015	9.782,50	5,051
16/09/2015	9.976,80	5,152
17/09/2015	10.106,60	5,234
18/09/2015	9.847,20	5,051
21/09/2015	9.856,80	5,053
22/09/2015	9.550,20	4,872
23/09/2015	9.474,60	4,77
24/09/2015	9.291,40	4,611
25/09/2015	9.519,50	4,717
28/09/2015	9.394,20	4,629
29/09/2015	9.393,90	4,662
30/09/2015	9.559,90	4,744
01/10/2015	9.567,30	4,733
02/10/2015	9.603,60	4,767
05/10/2015	9.971,30	4,981
06/10/2015	10.103,30	5,122
07/10/2015	10.170,00	5,247
08/10/2015	10.181,20	5,215
09/10/2015	10.309,60	5,37
12/10/2015	10.246,40	5,283
13/10/2015	10.115,30	5,14
14/10/2015	10.037,60	5,045
15/10/2015	10.101,70	5,036
16/10/2015	10.231,50	5,19
19/10/2015	10.207,30	5,15
20/10/2015	10.100,60	5,029
21/10/2015	10.157,50	5,053
22/10/2015	10.365,40	5,216
[illegible]	[illegible]	[illegible]

	Rendimientos	
01/09/2015	IBEX	SAN
02/09/2015	-0,55%	-0,28%
03/09/2015	1,05%	0,72%
04/09/2015	-2,20%	-2,85%
07/09/2015	-0,17%	-0,27%
08/09/2015	0,62%	0,19%
09/09/2015	1,74%	2,22%
10/09/2015	-1,78%	-3,31%
11/09/2015	-1,23%	-1,64%
14/09/2015	-0,43%	-0,46%
15/09/2015	0,89%	0,88%
16/09/2015	1,99%	2,00%
17/09/2015	1,30%	1,59%
18/09/2015	-2,57%	-3,50%
21/09/2015	0,10%	0,04%
22/09/2015	-3,11%	-3,58%
23/09/2015	-0,79%	-2,09%
24/09/2015	-1,93%	-3,33%
25/09/2015	2,45%	2,30%
28/09/2015	-1,32%	-1,87%
29/09/2015	0,00%	0,71%
30/09/2015	1,77%	1,76%
01/10/2015	0,08%	-0,23%
02/10/2015	0,38%	0,72%
05/10/2015	3,83%	4,49%
06/10/2015	1,32%	2,83%
07/10/2015	0,66%	2,44%
08/10/2015	0,11%	-0,61%
09/10/2015	1,26%	2,97%
12/10/2015	-0,61%	-1,62%
13/10/2015	-1,28%	-2,71%
14/10/2015	-0,77%	-1,85%
15/10/2015	0,64%	-0,18%
16/10/2015	1,28%	3,06%
19/10/2015	-0,24%	-0,77%
20/10/2015	-1,05%	-2,35%
21/10/2015	0,56%	0,48%
22/10/2015	2,05%	3,23%
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Rendimiento medio:

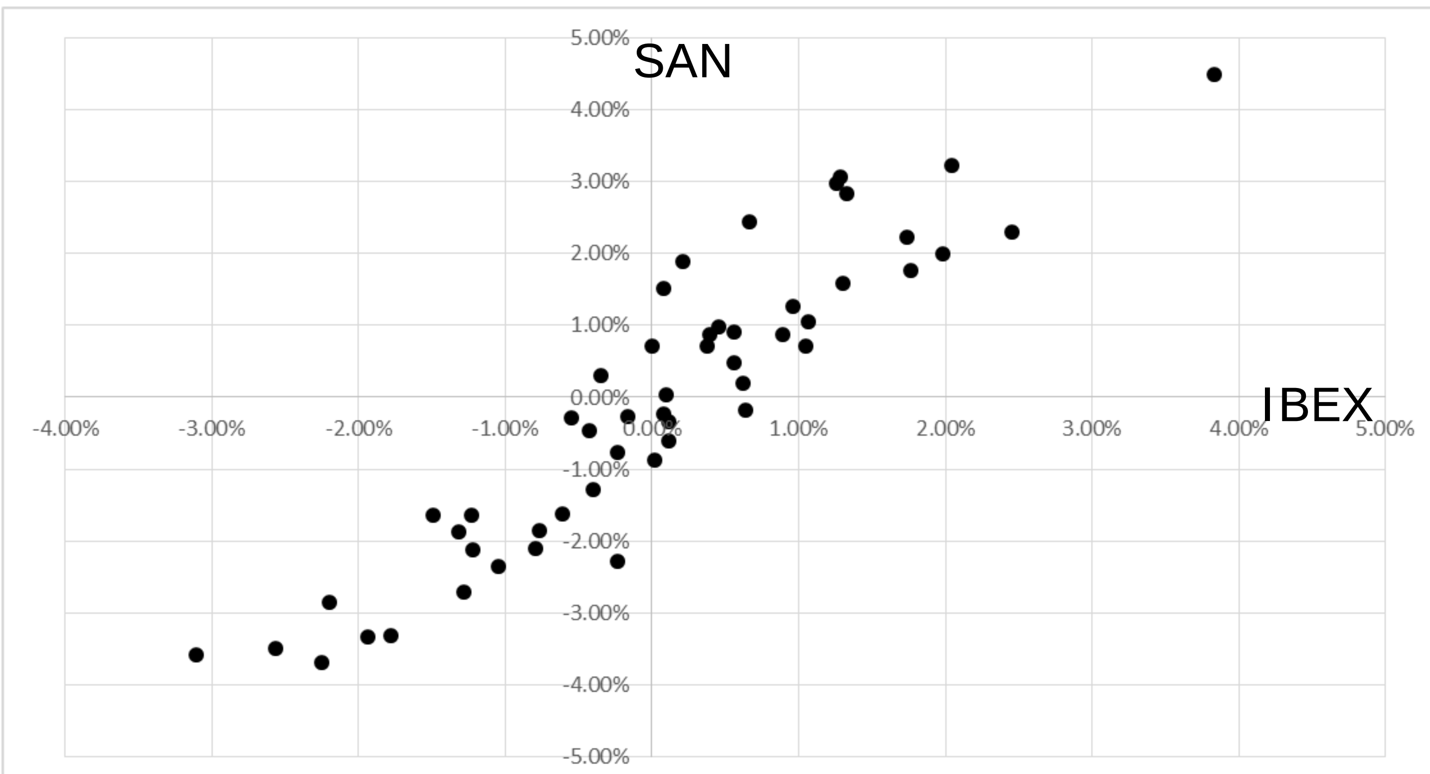
IBEX=0,04%

SAN= -0,08%


IBEX y SAN- Rendimientos diarios
5.00%
4.00%
3.00%
2.00%
1.00%
0.00%
-1.00%
-2.00%
-3.00%
-4.00%
-5.00%
24/08/2015
03/09/2015
13/09/2015
23/09/2015
03/10/2015
13/10/2015
23/10/2015
02/11/2015
12/11/2015
22/11/2015
IBEX
SAN

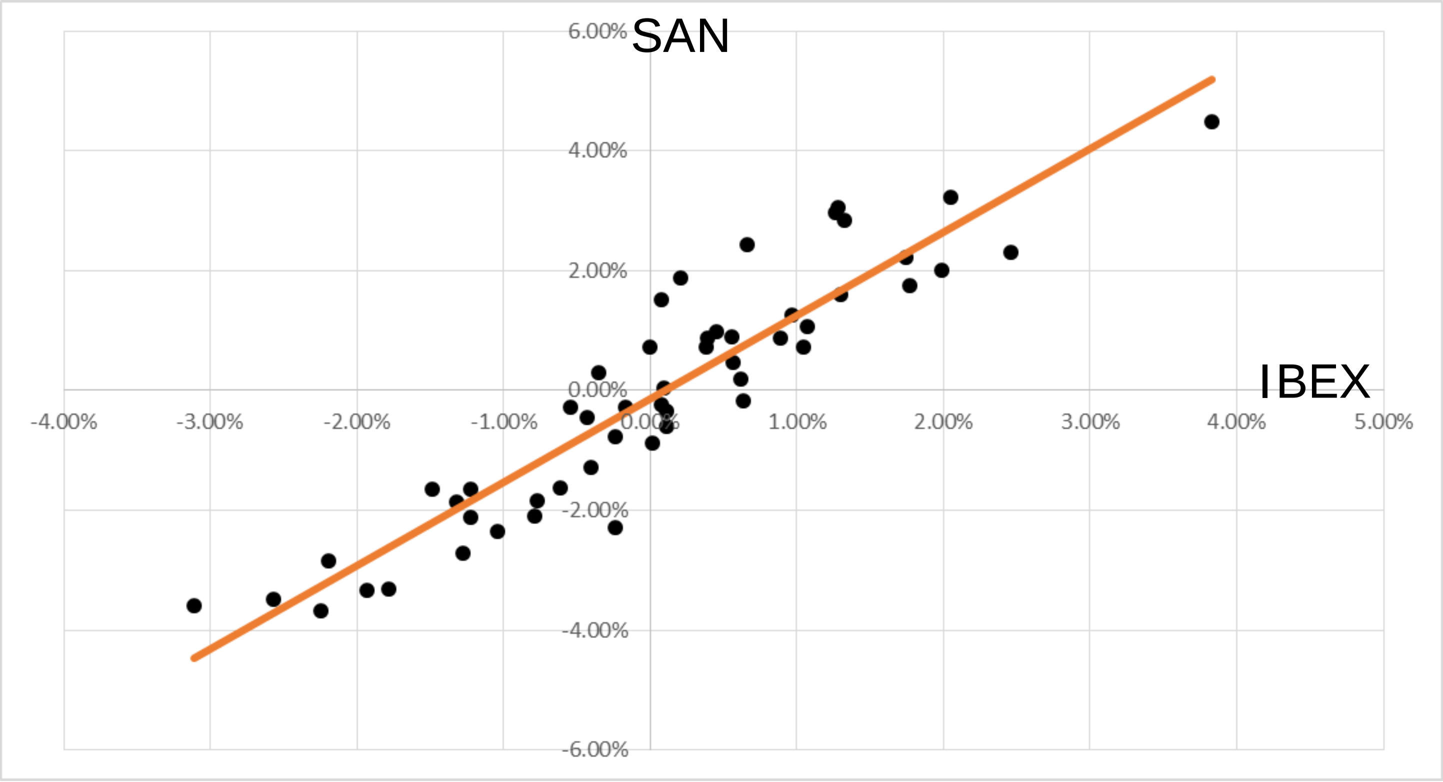
La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

Si **dibujamos** estos puntos obtenemos la siguiente figura:



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

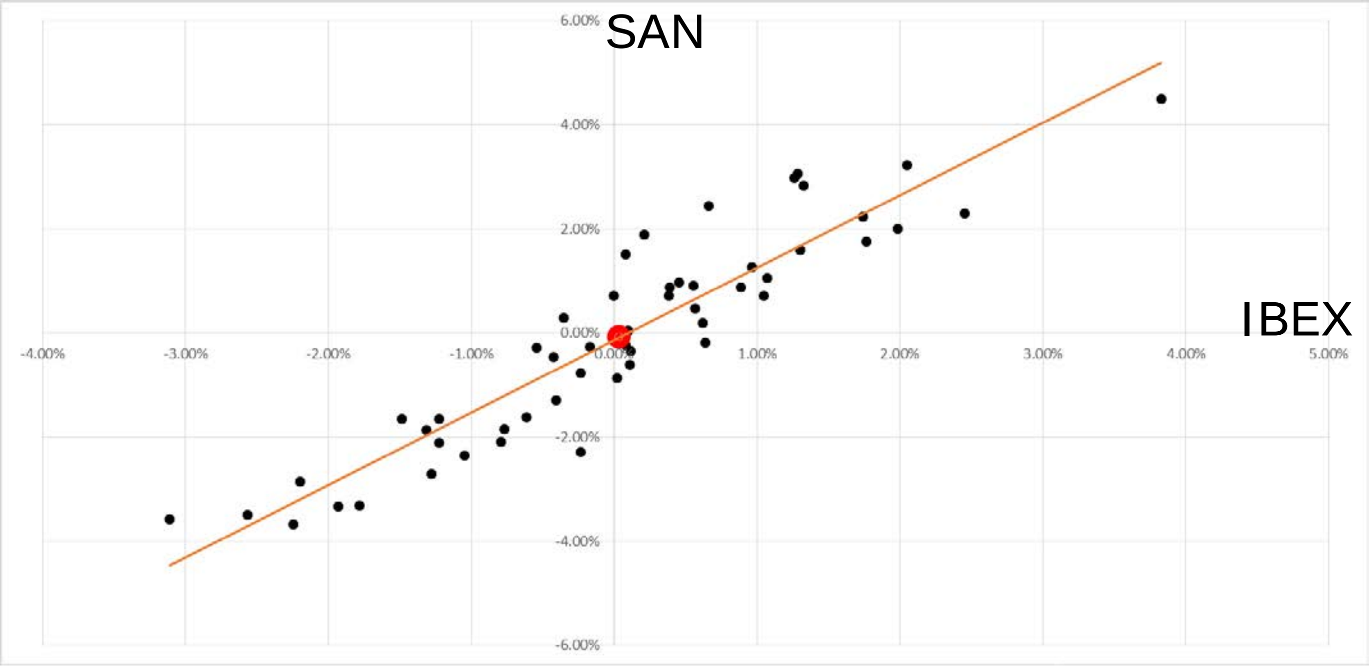
Sobre ellos aparece la **recta de regresión** que permite **describir** la **relación existente** entre el activo financiero y la cartera de mercado. Dicha línea recibe el nombre de línea característica del activo J en este caso, SAN.



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

- Dicha línea característica **muestra el rendimiento esperado del SAN dado un determinado nivel del rendimiento de la cartera de mercado, IBEX 35**.

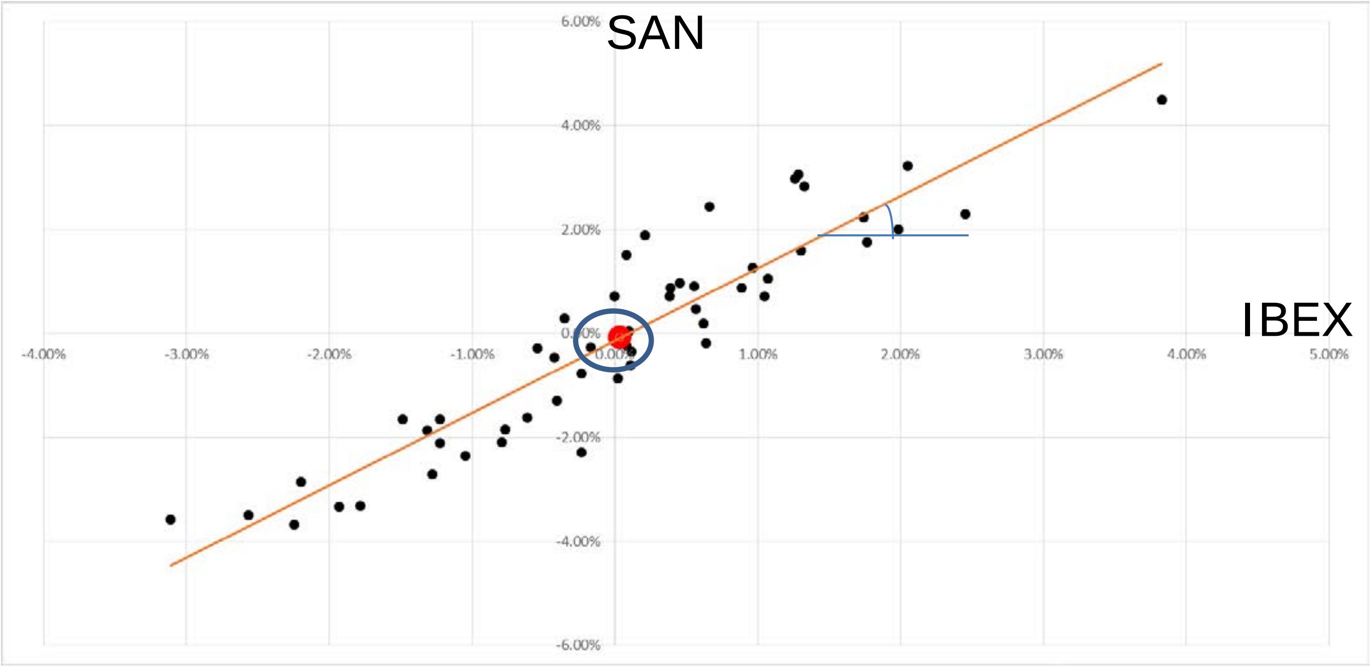
- Así en la figura anterior, si la cartera de mercado produce un rendimiento del 0,04%, el rendimiento esperado del activo SAN sería del -0,08% (punto rojo en la figura).



La relación entre un activo financiero y la cartera de mercado

- En la medida en que la línea característica es una línea recta, ésta puede venir perfectamente descrita por su **pendiente** y por el **punto de corte con el eje** de ordenadas.

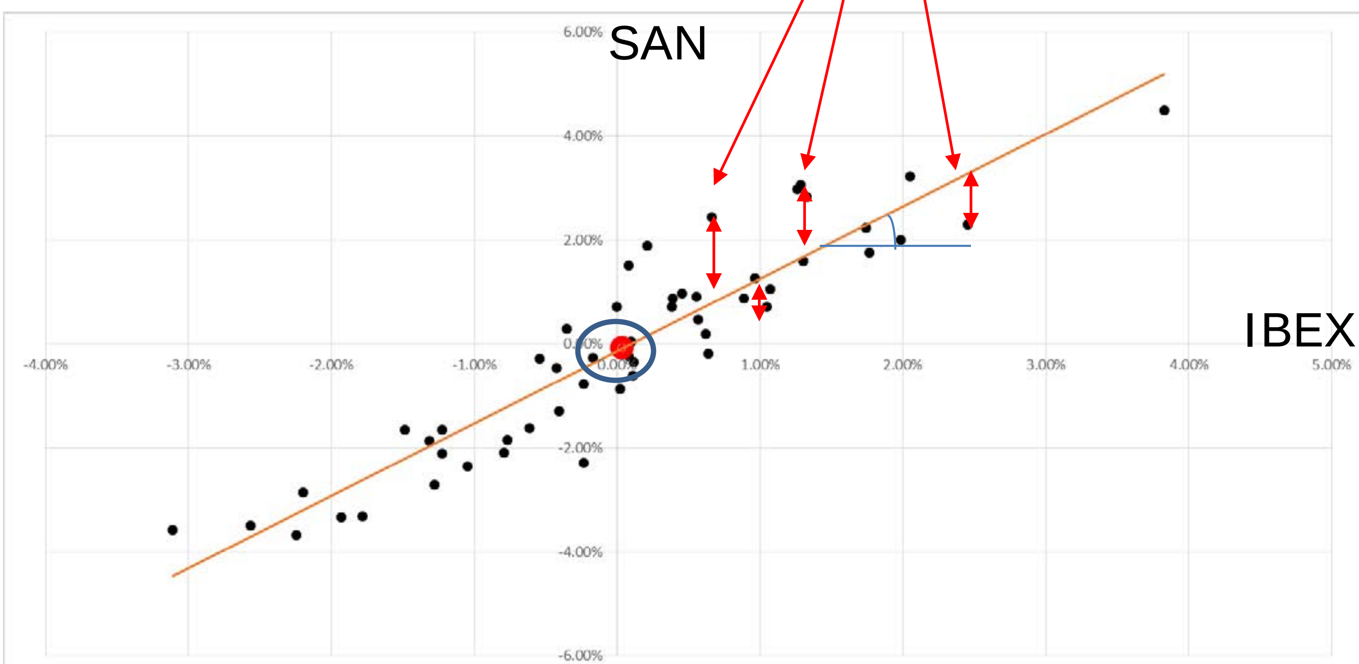
- La **pendiente de la línea característica es denominada habitualmente como el factor beta del activo SAN o β**. Nos referiremos al punto de corte con el eje vertical por el símbolo *A*.



BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- Si se pretende explicar los rendimientos del activo SAN en función de los rendimientos de la cartera de mercado, IBEX propondríamos el siguiente **modelo de regresión lineal simple**, donde llamamos a los rendimientos del activo SAN mediante r_j y los de la cartera de mercado como r_M.

$$r_j = A_j + \beta_j r_M + \varepsilon_j$$



BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- Realizando la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos o desviaciones, se llega a las ecuaciones normales y despejando éstas se llega a las fórmulas para calcular directamente el **factor** β y el **punto de corte**:

$$\hat{\beta}_j = \frac{Cov\, r_j r_M}{\sigma^2_{r_M}} \qquad , \qquad \hat{A}_j = \bar{r}_j - \hat{\beta}_j \bar{r}_M$$

- Donde $Cov\, r_j r_M$ es la covarianza entre los rendimientos del activo j y la cartera de mercado y $\sigma^2_{r_M}$ es la varianza de los rendimientos de la cartera de mercado.

- Datos que necesitamos:

✓ Covarianza del SAN con el IBEX=0,0002544
✓ Varianza del IBEX=0,00018278

¿Como calculamos la beta del SAN? Dividiendo la covarianza que hay entre el SAN y el IBEX entre la varianza del IBEX.

$$\beta_{SAN} = \frac{Covarianza\ (SAN, IBEX)}{Varianza\ IBEX} = \frac{0{,}0002544}{0{,}00018278} = 1{,}3919$$

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	-0.00136208	0.00107308	-1.26932112	0.21020322
IBEX	1.39193991	0.08011458	17.3743648	7.8873E-23

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- El factor beta es un indicador del grado en el que dicho activo (SAN) responde a cambios en el rendimiento de la cartera de mercado (IBEX).

- El factor β para el activo SAN es 1,39. Esto indica que si supiéramos que el rendimiento de la cartera de mercado va a ser superior en un 1% a su rendimiento esperado, entonces esperaríamos un incremento en el rendimiento del SAN del 1,39% sobre su media.

- Es una **medida de la sensibilidad de la rentabilidad de un activo financiero ante cambios en la rentabilidad de una cartera de referencia**. La beta nos indica cómo variará la rentabilidad del activo financiero si lo comparamos con la evolución de una cartera o índice de referencia. Habitualmente, la cartera o índice de referencia **corresponderá al índice bursátil más representativo** donde se negocia el activo financiero. Así por ejemplo, para acciones negociadas en la Bolsa española se suele tomar como índice de referencia el **IBEX-35** y para acciones cotizadas en la Bolsa de Nueva York se puede utilizar el S&P 500.

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

Su rango de posibles valores no está acotado. No obstante, existen unos **niveles típicos de beta de un activo financiero** y que podemos agrupar en los siguientes:

- ✓ **Beta igual a uno**: en este caso, la rentabilidad del activo financiero se va a **comportar igual que el índice de referencia**. Si por ejemplo, el índice de referencia fuese el IBEX, y éste sube un 7% entonces el activo financiero en cuestión también debería ascender un 7%. Pero, cuidado, porque la réplica del movimiento también se produciría en el caso de que el índice cayera.

- ✓ **Beta mayor que uno**: en esta situación, el activo financiero va a mostrar una **mayor variabilidad que el índice** de referencia y, por tanto, amplificará los movimientos del mercado, tanto al alza como a la baja. Por ejemplo, para una beta igual a 1,5, si el índice bajara un 5%, el activo descenderá un 7,5%.

- ✓ **Beta menor que uno**: en este caso, el activo financiero en cuestión es de **corte defensivo** y presenta una **menor variabilidad que el índice** de referencia. Para el mismo ejemplo que el caso anterior, pero con una beta de 0,5, el activo financiero sólo caería la mitad, esto es, un 2,5%.

BETA DE UN ACTIVO FINANCIERO

- Por otro lado, los valores de las betas también quedan **condicionados por el período temporal que se fije para su cálculo**. En función del horizonte temporal de la inversión, se puede fijar como referencia uno de ellos.

- Por último, es **bastante improbable** que la beta de un activo financiero tome **valores negativos** y, por tanto, muestre un **comportamiento inverso** al del mercado en el que se negocian. Esta situación se asimilaría a la contratación de una especie de seguro, ante posibles movimientos adversos del mercado. En la realidad, pueden existir este tipo de **activos "refugio"** como así ha ocurrido y sigue sucediendo con la inversión en determinados metales preciosos como el oro; si bien se ha de tener en cuenta que no se trata de activos financieros. Estas inversiones muestran su carácter "refugio" en toda su plenitud, sobre todo en las épocas de crisis financieras.

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

EJERCICIO: CALCULO Y ANALISIS DE LA BETA DE UN CONJUNTO DE ACTIVOS FINANCIEROS

- ✓ En la siguiente tabla se tienen las covarianzas de cada una de estas acciones con el IBEX 35:

ABENGOA	INDITEX	GAS NATURAL	MEDIASET	REPSOL
0,0001100	0,0001965	0,0001860	0,0001692	0,0002702

BANKIA	ACERINOX	ENDESA	BBVA	TELEFONICA
0,0001500	0,0003019	0,0000910	0,0001829	0,0002431

- ✓ Y sabiendo que la varianza del **IBEX=0,00018278**

- ➢ **Calcula la beta de cada uno de los activos anteriores, clasifica la beta según en grupos según los valores que obtengas y explica en cada caso la interpretación de dicho coeficiente beta.**

EJERCICIO: CALCULO Y ANALISIS DE LA BETA DE UN CONJUNTO DE ACTIVOS FINANCIEROS

Beta >1	Beta <1	Beta=1
INDITEX	ABENGOA	BBVA
1,075104908	0,60191077	1,000850897
GAS NATURAL	MEDIASET	
1,017822345	0,92579696	
REPSOL	BANKIA	
1,478210997	0,82055666	
ACERINOX	ENDESA	
1,651611384	0,49797517	
TELEFONICA		
1,330240803		

Teoría de carteras de Markowitz

Teoría de carteras de Markowitz

Harry Max Markowitz, (Chicago 1927 -) recibió el premio Nobel de Economía en 1990. Markowitz es uno de los numerosos economistas laureados con el Nobel de Economía durante el siglo XX producidos por la prestigiosa Escuela de Economía de Chicago de la Universidad de Chicago.

Harry Markowitz publicó en 1952 un artículo titulado **Portfolio Selection** en el *Journal of Finance*, en el que estudiaba el proceso de selección de una cartera de inversión.

De esta teoría se deriva la **Frontera de eficiencia de Markowitz** que es el conjunto de carteras que obtienen el rendimiento esperado más alto para un determinado nivel de riesgo asumido.

Teoría de carteras de Markowitz

- También llamado **modelo media-varianza**

- Principal **aportación** del modelo: recoger de forma explicita el **comportamiento racional del inversor**

- Buscar la composición de cartera que **maximice** su **rendimiento** o **minimice** su **riesgo**

- **Problema que se plantea**: **Maximizar** la función de **utilidad** de un individuo **racional** y **adverso** al riesgo que desea invertir la totalidad de su presupuesto en N **activos arriesgados** que cotizan en Bolsa.

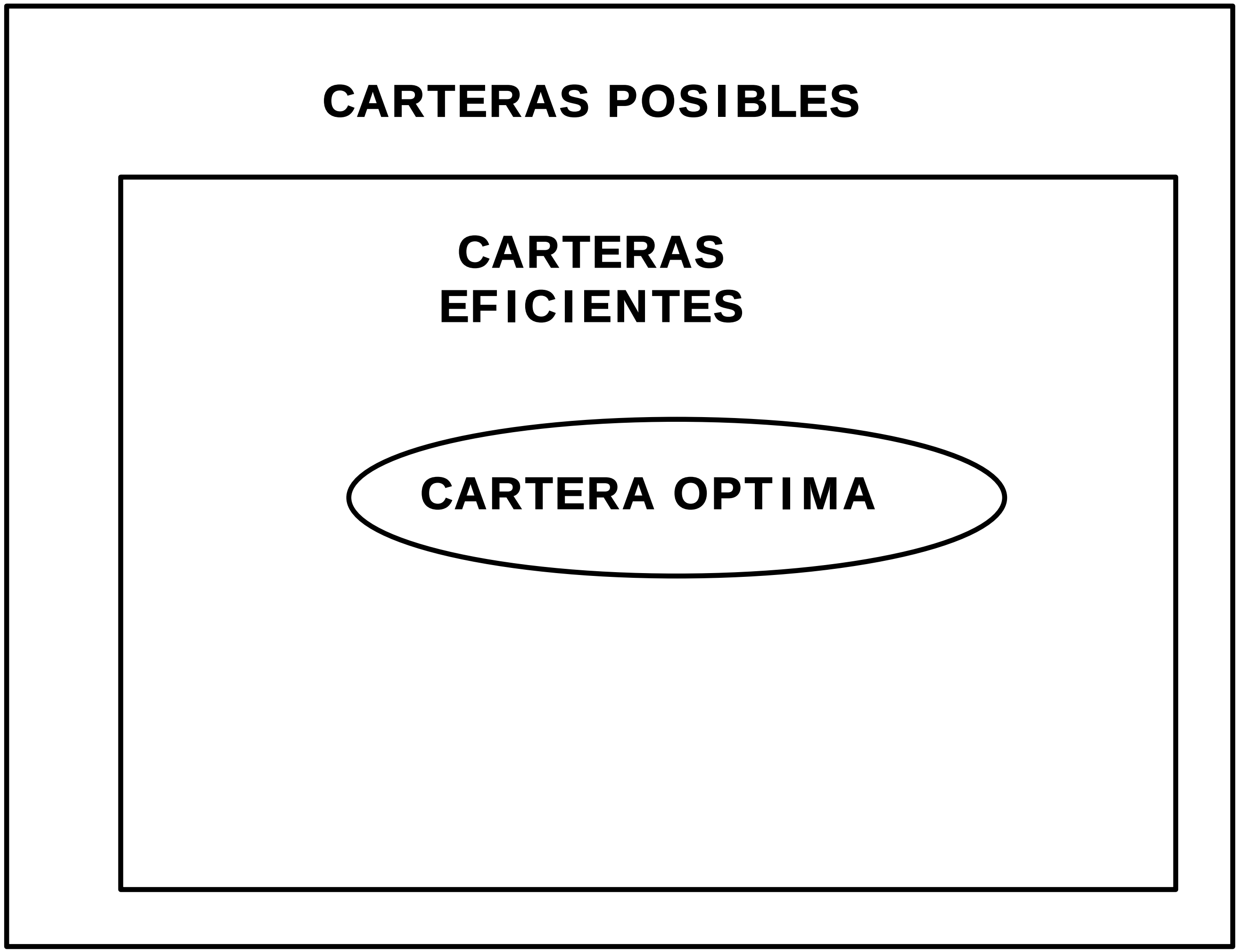
- En el tema anterior hemos tratado de dar respuesta a la pregunta de qué ocurre al **combinar activos financieros** individuales en una cartera.

- A continuación partimos de un conjunto de activos financieros y tratamos de determinar **cuáles son las combinaciones óptimas** de los mismos y **cuál de ellas hay que seleccionar** a la hora de tomar una decisión de invertir.

- Para ello y a partir de una serie de **hipótesis** relativas a la **racionalidad** de los inversores y sobre los **rendimientos** de los activos financieros, se supondrá que la toma de decisiones óptimas por parte de todos los inversores tiene lugar en **cuatro fases**.

- El modelo de **Markowitz** pretende determinar la composición de la cartera que maximice la utilidad esperada del inversor:

CARTERA OPTIMA


CARTERAS POSIBLES
CARTERAS
EFICIENTES
CARTERA OPTIMA

Hipótesis del modelo de Markowitz

Hipótesis relativas a los activos financieros

1. **Toda inversión es una decisión tomada en ambiente de incertidumbre.** El rendimiento de un activo financiero para un período futuro de tiempo dado es una variable aleatoria, haciéndose la hipótesis de que se distribuye según una ley normal, es decir, una distribución simétrica, estable y enteramente definida a partir de su esperanza matemática y su desviación típica. De esta forma queda plenamente justificado el que los criterios de decisión se establezcan exclusivamente en base a la **media** y la **varianza** de los **rendimientos** de los **activos financieros** y de las **carteras** compuestas a partir de los mismos, cuyos rendimientos también se distribuirán normalmente.

2. **Los rendimientos de los diferentes activos financieros no fluctúan independientemente los unos de los otros, es decir, están correlacionados, o lo que es lo mismo, tienen covarianzas no nulas.**

Hipótesis del modelo de Markowitz

Hipótesis relativas a los inversores

1. **El comportamiento de los inversores está caracterizado por un grado más o menos pronunciado de aversión al riesgo.** El riesgo está medido por la desviación típica de la distribución de probabilidad de los rendimientos.

2. **Los inversores son racionales**: aunque su **función de utilidad** sea puramente subjetiva, sus preferencias en el espacio riesgo - rendimiento son estrictamente transitivas.

Ante 3 alternativas, si prefiere x a y, e y a z, prefiere x a z:

$x > y \;\wedge\; y > z \;\rightarrow\; x > z$ (ídem para "es indiferente a")

- Proceso de **cuarto fases**:

FASE 1: Determinación del **conjunto de oportunidades de inversión**

FASE 2: Determinación de la **Frontera Eficiente**

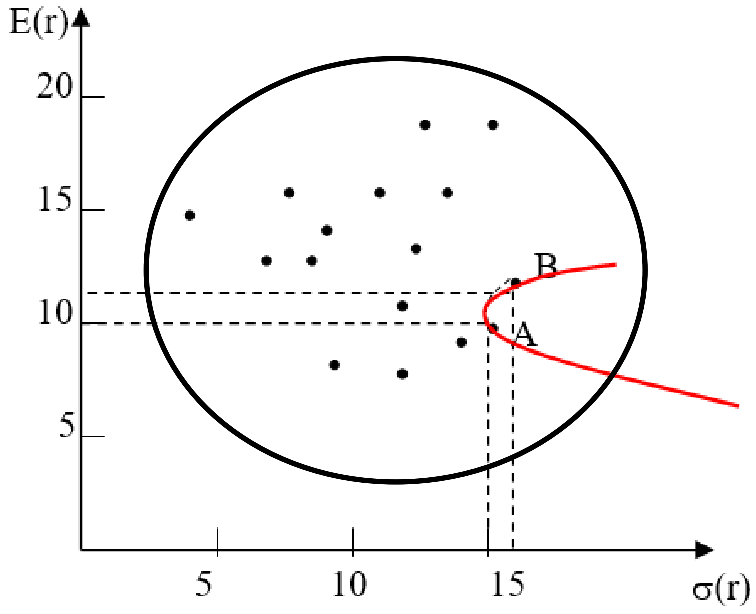
FASE 3: Especificación de las **preferencias** del **inversor**

FASE 4: Determinación de la **cartera óptima**

FASE 1:

Determinación del **conjunto de oportunidades de inversión**

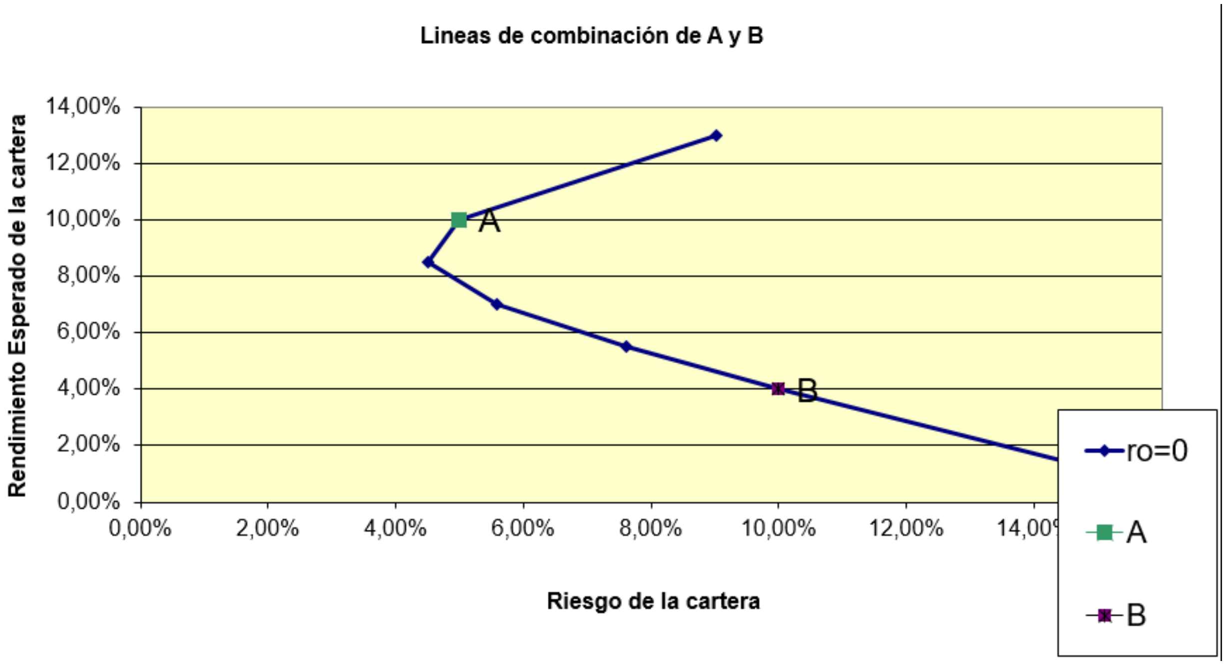
Los puntos que aparecen en la figura señalan posiciones de **activos financieros individuales**. Así el activo financiero A corresponde a una acción que tiene un rendimiento esperado del 10% y una desviación estándar del 15%.



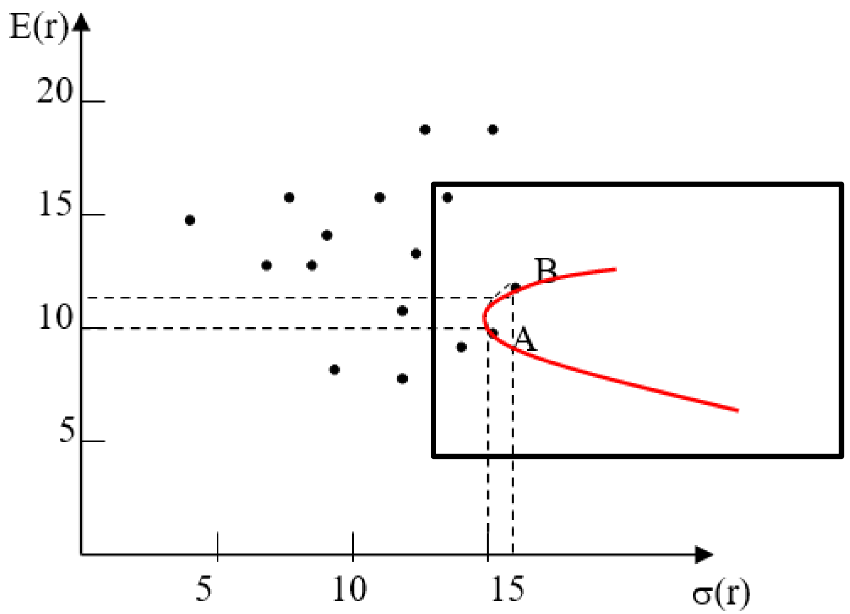
Recordatorio: Línea de combinación

Suponemos que la correlación entre las variables es 0.

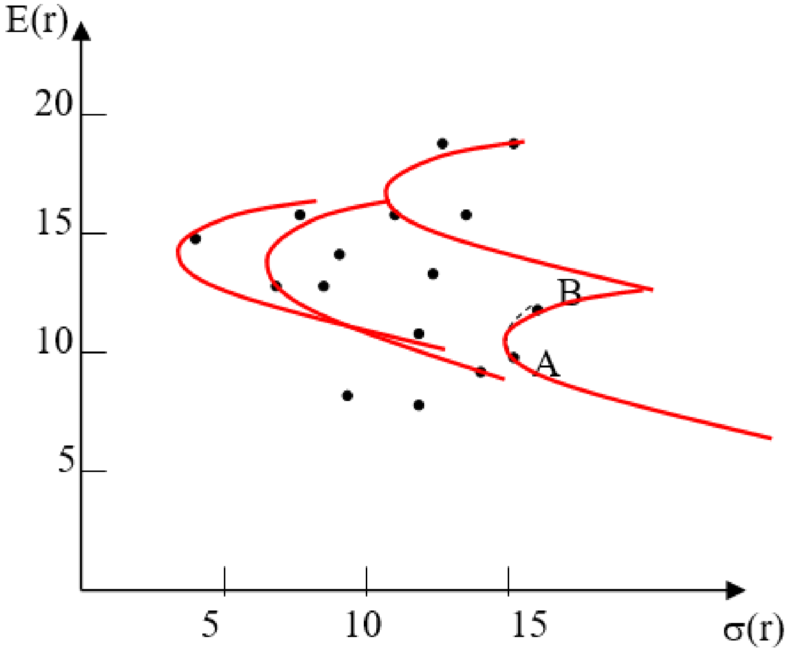
x_A	1,5	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,5
x_B	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
r_C	**13,00%**	**10,00%**	**8,50%**	**7,00%**	**5,50%**	**4,00%**	**1,00%**
σ_C^2	**0,0081**	**0,0025**	**0,0020**	**0,0031**	**0,0057**	**0,01**	**0,0231**
σ_C	**9,01%**	**5,00%**	**4,51%**	**5,59%**	**7,60%**	**10,00%**	**15,21%**



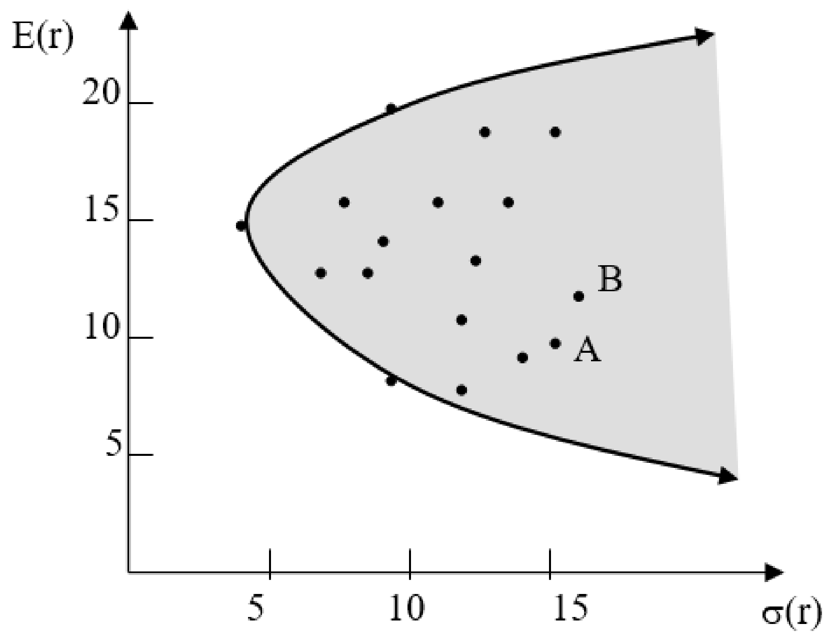
Estos activos individuales pueden combinarse para formar carteras. Por ejemplo, se puede invertir en los activos A y B y alcanzar alguno de los puntos en la **línea de combinación** que une A y B.



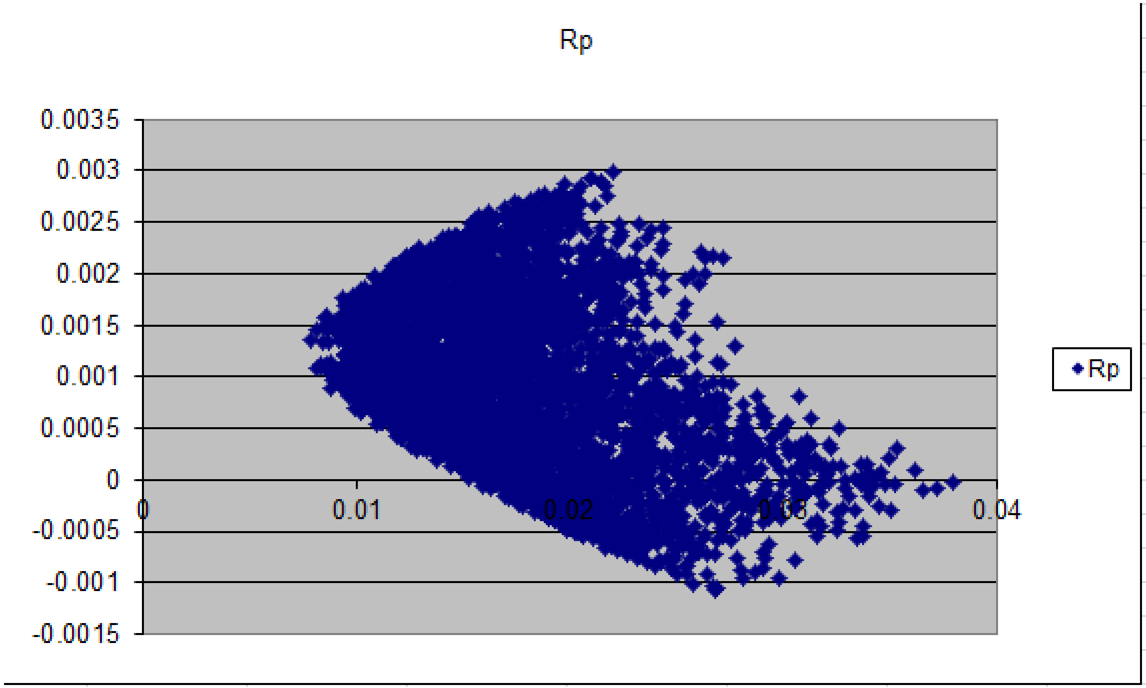
Obviamente el conjunto de posibles carteras que se podrían formar tomando posiciones largas y cortas en los diferentes activos sería enorme y ocuparía numerosos puntos en el plano anterior.



El conjunto de las posibles carteras representa el **conjunto de oportunidades del inversor** (área gris del dibujo).



Formación de carteras con 5 activos con riesgo: BBVA, IBE, SAN, ADZ; ZEL con 3000 simulaciones para cada activo de distintas ponderaciones



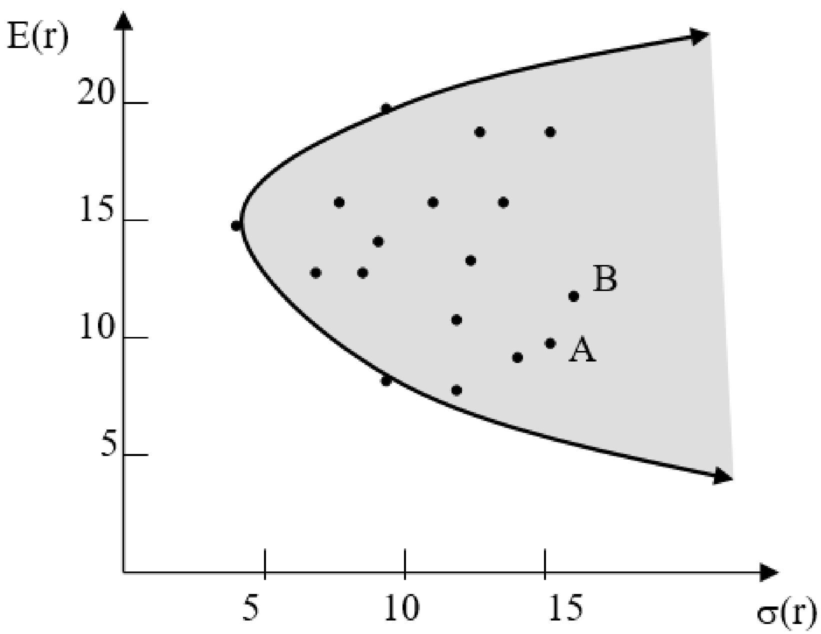
FASE 2:

Determinación de la **Frontera Eficiente**

- Algunas de las **posiciones serán claramente preferidas a otras**.

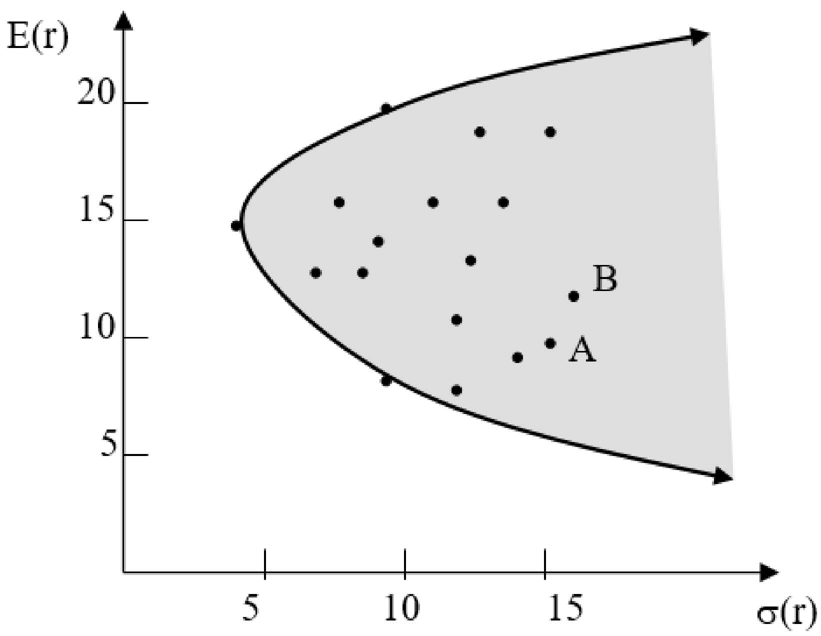
- Así dado un **determinado** nivel de **riesgo** se preferirán aquellas carteras que proporcionan un **mayor** nivel de **rendimiento** esperado.

- Por el contrario, dado un **determinado** nivel de **rendimiento** esperado se preferirán aquellas posiciones de **menor riesgo**.



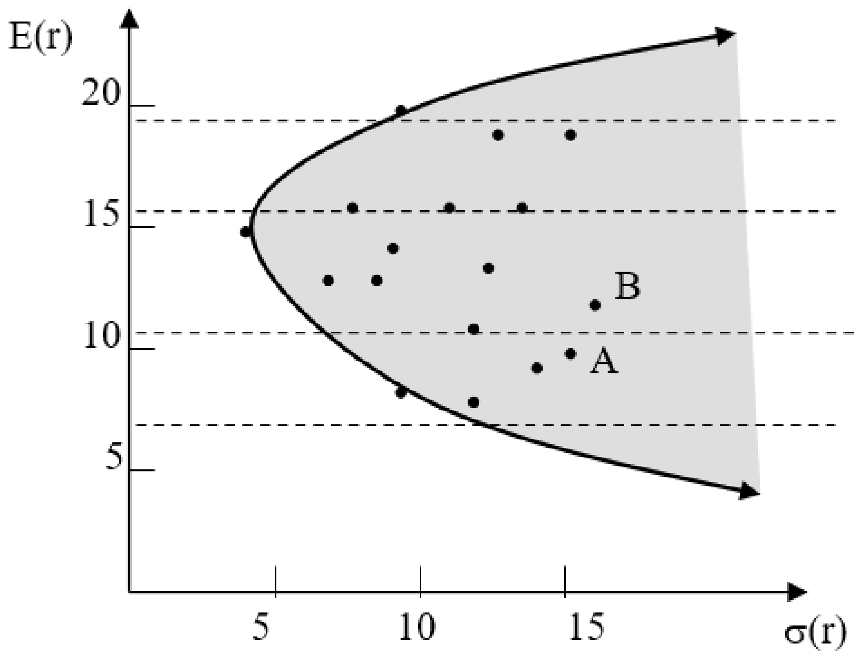
- En cualquier caso, dadas las características de los activos disponibles, el **conjunto de oportunidades de inversión tiene un perímetro** que está representado por la **curva** del diagrama.

- Dicha curva se conoce por el **conjunto de mínima varianza.**



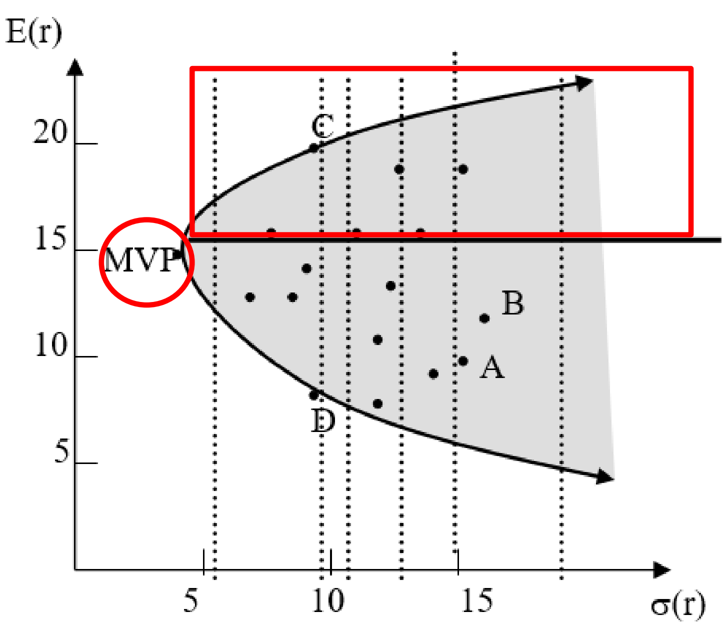
Cada punto del **conjunto de mínima varianza** representa una cartera que sigue el siguiente criterio:

"Dado un nivel particular de rendimiento esperado, la cartera situada sobre el conjunto de mínima varianza tiene la mínima desviación típica alcanzable a partir del conjunto de activos financieros disponibles".



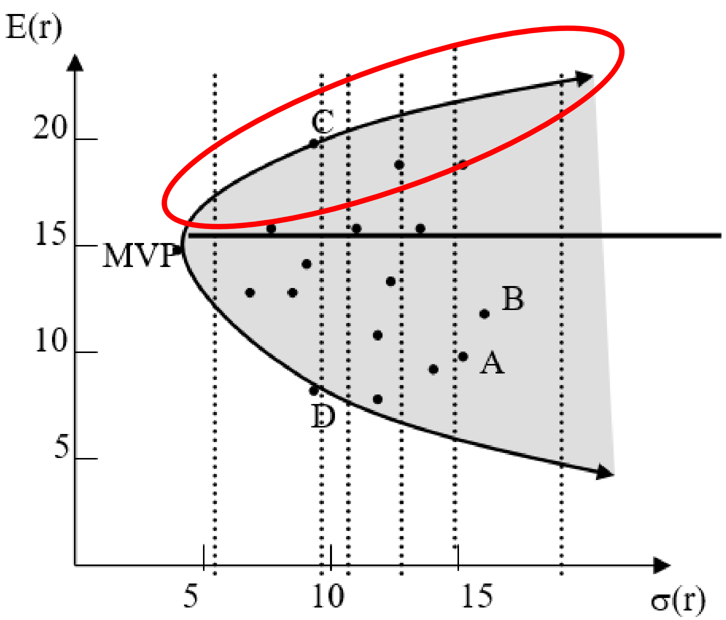
- El conjunto de mínima varianza a su vez puede ser dividido en **dos mitades**, superior e inferior.

- Dichas mitades están separadas en el **punto MVP** que **representa la cartera con el mínimo nivel posible de riesgo**, es decir, **la cartera de mínima varianza global**. Las carteras más deseables para el inversor son las situadas en la mitad superior.



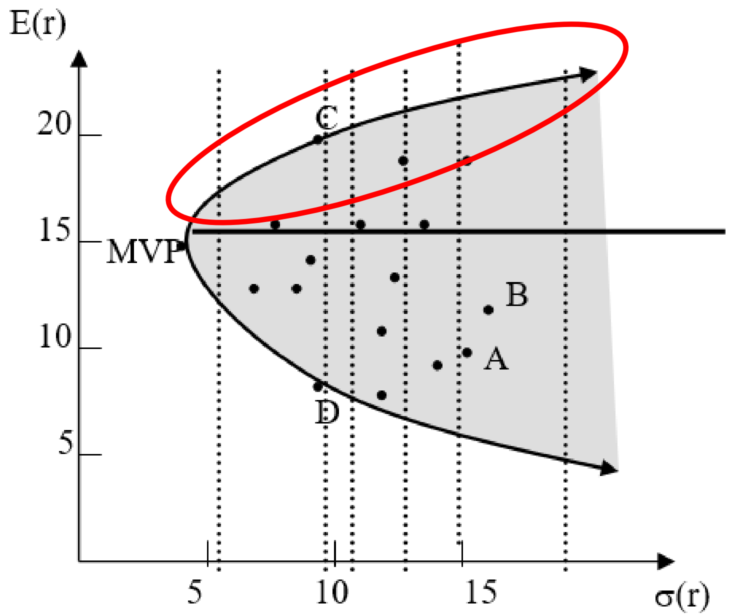
El conjunto de puntos situados en esta mitad superior del conjunto de mínima varianza se denomina **conjunto eficiente o frontera eficiente**. Todas las carteras situadas en el conjunto eficiente se caracterizan por la siguiente propiedad:

"Dado un nivel determinado de desviación típica, las carteras en el conjunto eficiente son aquellas con el mayor nivel alcanzable de rendimiento esperado".

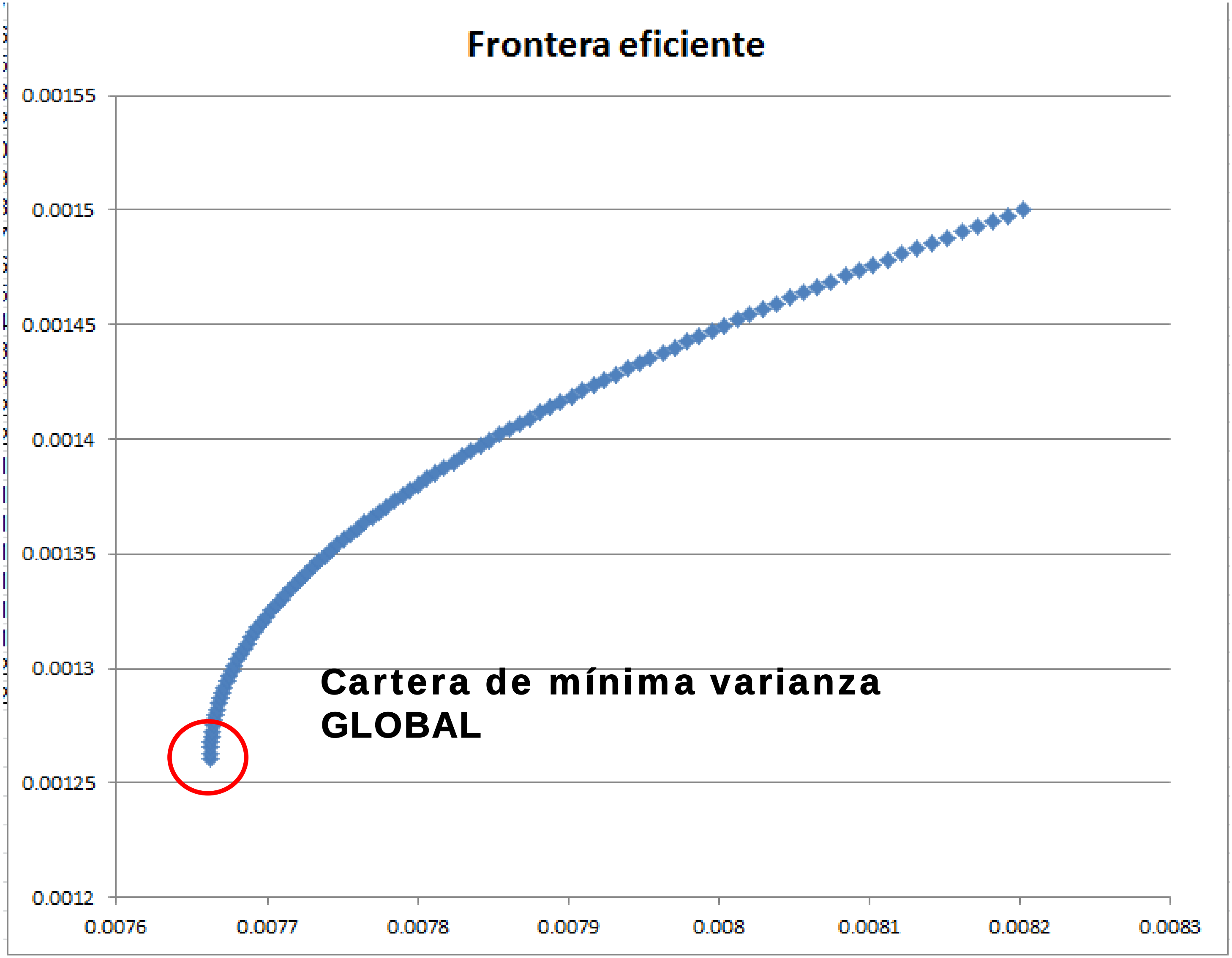


Carteras C y D:

- Mientras las carteras C y D pertenecen al conjunto de mínima varianza, solo la C se sitúa en la **frontera eficiente**.
- La cartera D es la de menor rendimiento esperado dado su nivel de riesgo.



Frontera eficiente



Como se obtiene la frontera eficiente

Analizamos un procedimiento para encontrar el conjunto de mínima varianza mediante el **método analítico.**

EJEMPLO

Se parte de una cartera con 3 activos A, B y C cuyos **rendimientos esperados** supondremos que son los siguientes:

$$E[r_A] = 5\%$$
$$E[r_B] = 10\%$$
$$E[r_C] = 15\%$$

Siendo la **matriz de varianzas-covarianzas** la siguiente:

σ_{ij}	A	B	C
A	0,25	0,15	0,17
B	0,15	0,21	0,09
C	0,17	0,09	0,28

Como se obtiene la frontera eficiente

- ✓ Encontrar la **cartera de mínima varianza** dado un determinado nivel de rendimiento esperado es un problema de **optimización** con **restricciones**. El objetivo es minimizar la varianza de la cartera.

Para una cartera con tres activos:

$$Min\ \sigma^2(r_p) = x^2_A\sigma^2_A + x^2_B\sigma^2_B + x^2_C\sigma^2_C + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + 2x_Ax_C\sigma_{AC} + 2x_Bx_C\sigma_{BC}$$

Sujeta a un rendimiento esperado objetivo:

$$E[r^*_P] = x_AE[r_A] + x_BE[r_B] + x_CE[r_C]$$

De tal forma que la suma de las ponderaciones debe sumar uno:

$$1 = x_A + x_B + x_C$$

La primera de las ecuaciones es la función objetivo y las dos últimas son las restricciones del problema. Las variables que vamos a **obtener** al resolver este problema son las **ponderaciones de A, B y C** que en estas condiciones, nos proporcionan la **cartera de mínima varianza**.

Como se obtiene la frontera eficiente

- ✓ Encontrar la **cartera de mínima varianza** dado un determinado nivel de rendimiento esperado es un problema de **optimización** con **restricciones**. El objetivo es minimizar la varianza de la cartera.

Para una cartera con tres activos:

$$Min\ \sigma^2(r_p) = x^2_A\sigma^2_A + x^2_B\sigma^2_B + x^2_C\sigma^2_C + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + 2x_Ax_C\sigma_{AC} + 2x_Bx_C\sigma_{BC}$$

Sujeta a un rendimiento esperado objetivo:

$$E[r^*_P] = x_AE[r_A] + x_BE[r_B] + x_CE[r_C]$$

Rendimiento esperado del 10%

De tal forma que la suma de las ponderaciones debe sumar uno:

$$1 = x_A + x_B + x_C$$

xA	0,24
xB	0,52
xC	0,24
landa1	-0,48
landa2	0,3816

Ponderaciones de A, B y C que en estas condiciones, nos proporcionan la **cartera de mínima varianza** para un nivel de rendimiento esperado del 10%.

Como se obtiene la frontera eficiente

Por tanto, la **cartera de mínima varianza** se forma a partir de las siguientes proporciones:

$$\boxed{x_A = 24\% \quad x_B = 52\% \quad x_C = 24\%}$$

Por tanto, la rentabilidad esperada de la cartera y su riesgo serán:

$\boldsymbol{r_P}$ = $0{,}24 \cdot 0{,}05 + 0{,}52 \cdot 0{,}10 + 0{,}24 \cdot 0{,}15 = \mathbf{0{,}10}$ ➡ rentabilidad
*(es que hemos fijado)**

$0{,}24 + 0{,}52 + 0{,}24 = 1$*

$\boldsymbol{\sigma^2(r_P)} = 0{,}25 \cdot 0{,}24^2 + 0{,}21 \cdot 0{,}52^2 + 0{,}28 \cdot 0{,}24^2 +$
$2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}52 + 2 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}24 +$
$+ \; 2 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}24 = \mathbf{0{,}1668}$ ➡ Riesgo (varianza)

$\boldsymbol{\sigma_P} = \mathbf{0{,}4084}$ ➡ Riesgo (volatilidad)

Como se obtiene la frontera eficiente

Para **otros niveles de rendimiento** que podemos fijar, se obtendrían las siguientes ponderaciones de los 3 activos, lamba 1 y riesgo de la cartera:

Fijamos distintos rendimientos

De la minimización de la función obtenemos

$E[r_P]$	x^*_A	x^*_B	x^*_C	λ^*_1	σ_P
2	1,2	0,2	-0,4	-3,04	0,5546
4	0,96	0,28	-0,24	-2,4	0,5032
6	0,72	0,36	-0,08	-1,76	0,46
8	0,48	0,44	0,08	-1,12	0,4276
10	**0,24**	**0,52**	**0,24**	**-0,48**	**0,4084**
11,5	0,06	0,58	0,36	0	0,4040
12	0	0,6	0,4	0,16	0,4045
14	-0,24	0,68	0,56	0,80	0,4162
16	-0,48	0,76	0,72	1,44	0,4423
18	-0,72	0,84	0,88	2,08	0,4804
20	-0,96	0,92	1,04	2,72	0,5281

Calculamos con los datos anteriores el riesgo de la cartera

Como se obtiene la frontera eficiente

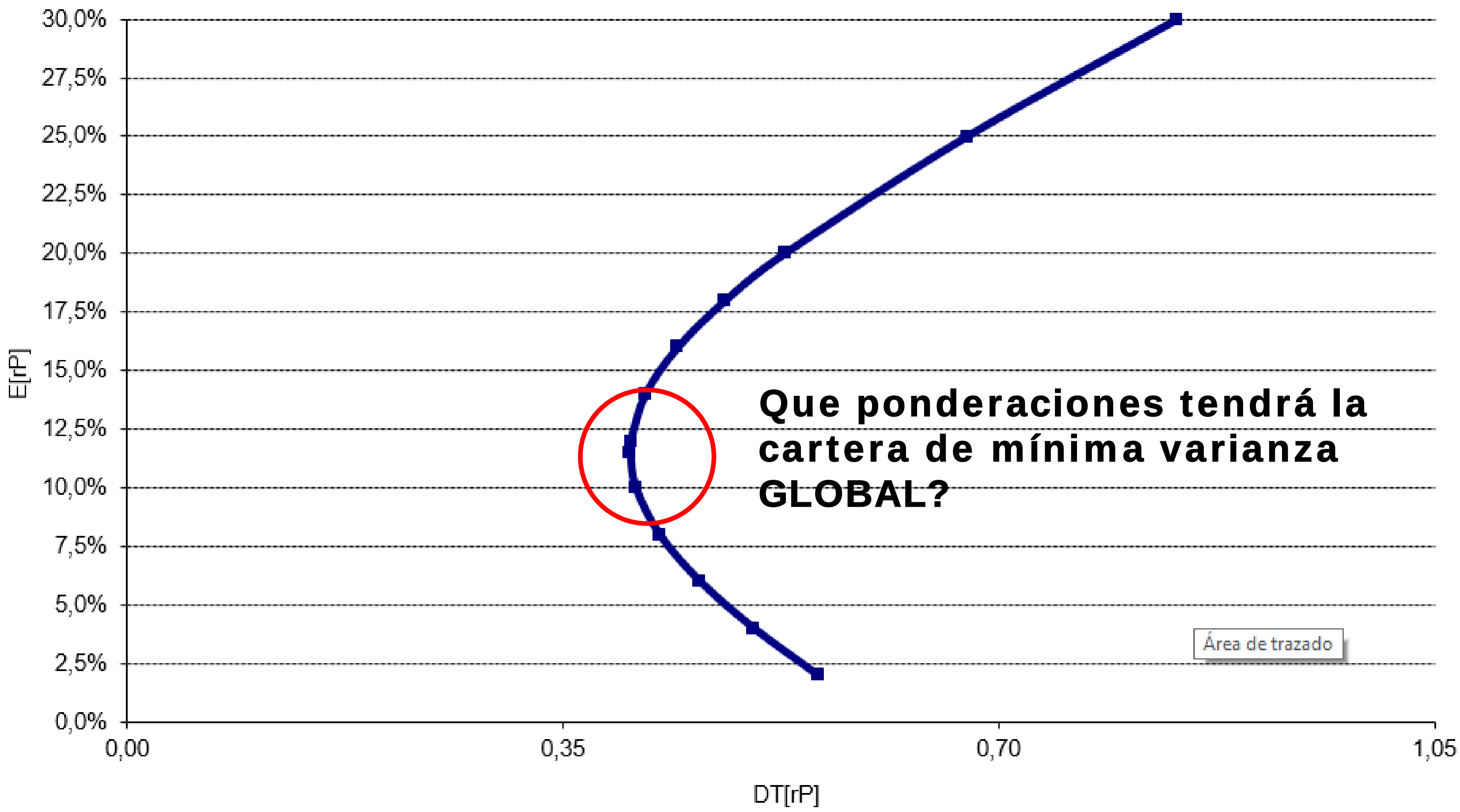
Para **otros niveles de rendimiento** que podemos fijar, se obtendrían las siguientes ponderaciones de los 3 activos, lamba 1 y riesgo de la cartera:

Rendimientos de la cartera

riesgo de la cartera

$E[r_P]$	x^*_A	x^*_B	x^*_C	λ^*_1	σ_P
2	1,2	0,2	-0,4	-3,04	0,5546
4	0,96	0,28	-0,24	-2,4	0,5032
6	0,72	0,36	-0,08	-1,76	0,46
8	0,48	0,44	0,08	-1,12	0,4276
10	**0,24**	**0,52**	**0,24**	**-0,48**	**0,4084**
11,5	0,06	0,58	0,36	0	0,4040
12	0	0,6	0,4	0,16	0,4045
14	-0,24	0,68	0,56	0,80	0,4162
16	-0,48	0,76	0,72	1,44	0,4423
18	-0,72	0,84	0,88	2,08	0,4804
20	-0,96	0,92	1,04	2,72	0,5281

Frontera eficiente



Que ponderaciones tendrá la cartera de mínima varianza GLOBAL?

- Es interesante analizar el valor de λ^*_1 que indica **cual es el incremento que se produce en la función objetivo al aumentar el valor de E[r*P]**.

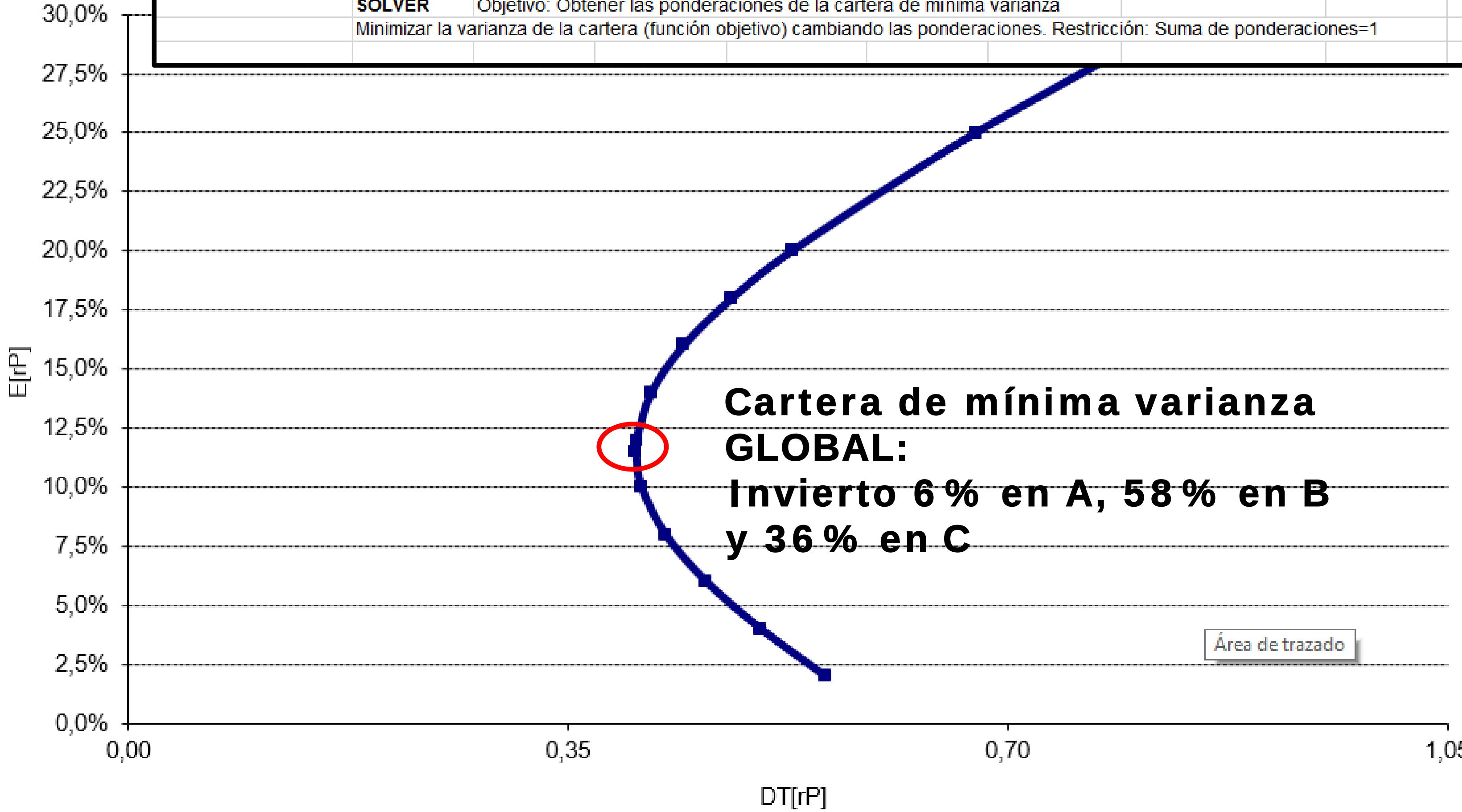
- Así, si $\lambda^*_1 < 0$ indica que incrementos de $E[r^*_P]$ conducen a disminuciones en la función objetivo; si $\lambda^*_1 > 0$ indica justo lo contrario. Por tanto, **la cartera de mínima varianza se encuentra en aquel punto en que $\lambda^*_1 = 0$.**

$E[r_P]$	x^*_A	x^*_B	x^*_C	λ^*_1	σ_P
2	1,2	0,2	-0,4	-3,04	0,5546
4	0,96	0,28	-0,24	-2,4	0,5032
6	0,72	0,36	-0,08	-1,76	0,46
8	0,48	0,44	0,08	-1,12	0,4276
10	**0,24**	**0,52**	**0,24**	**-0,48**	**0,4084**
11,5	0,06	0,58	0,36	0	0,4040
12	0	0,6	0,4	0,16	0,4045
14	-0,24	0,68	0,56	0,80	0,4162
16	-0,48	0,76	0,72	1,44	0,4423
18	-0,72	0,84	0,88	2,08	0,4804
20	-0,96	0,92	1,04	2,72	0,5281

5) CÁLCULO DE LA CARTERA DE MÏNIMA VARIANZA

xA	0,06		Var(rP)	DT(rP)
xB	0,58		0,163	0,404
xC	0,36			
	1,00	1		

SOLVER Objetivo: Obtener las ponderaciones de la cartera de mínima varianza
Minimizar la varianza de la cartera (función objetivo) cambiando las ponderaciones. Restricción: Suma de ponderaciones=1



FASE 3:

Especificación de las **preferencias** del **inversor**

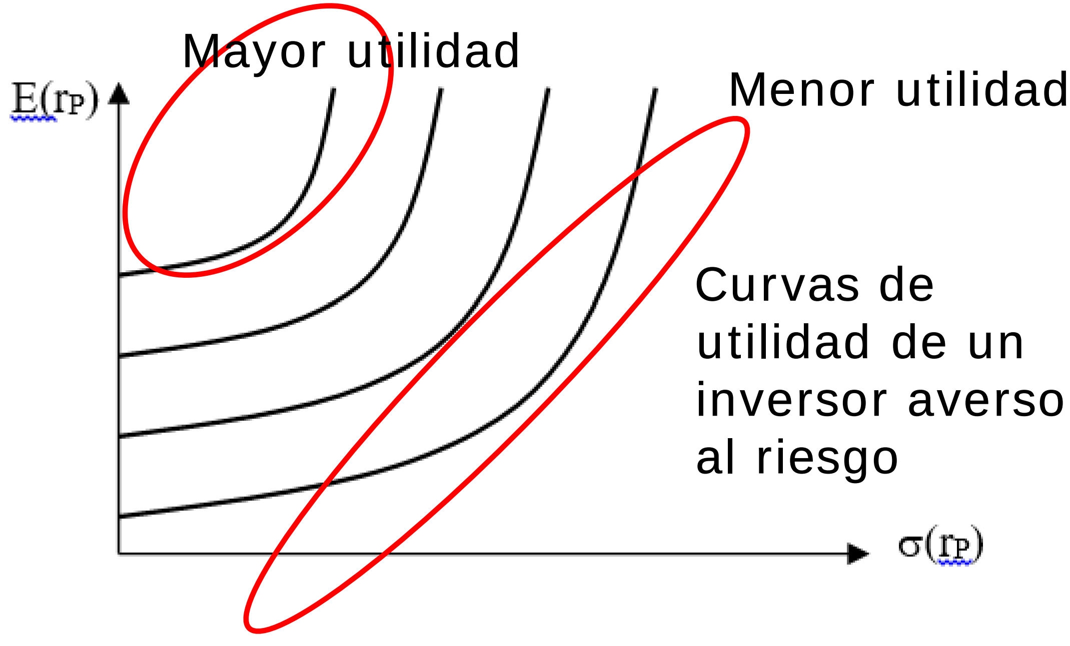
- Entre las carteras "**eficientes**" el inversor elige aquella que mejor responde a sus **preferencias**. Unos inversores prefieren una ganancia mayor aunque para ello tengan que soportar un mayor riesgo. Otros se conforman con una ganancia menor a cambio de un riesgo también inferior.

- Cada individuo tendrá su propia **curva de utilidad** donde estén representadas sus **preferencias**.

- Una misma curva ofrece distintas combinaciones de rendimiento y riesgo que le reporta al inversor igual ("**indiferente**") satisfacción.

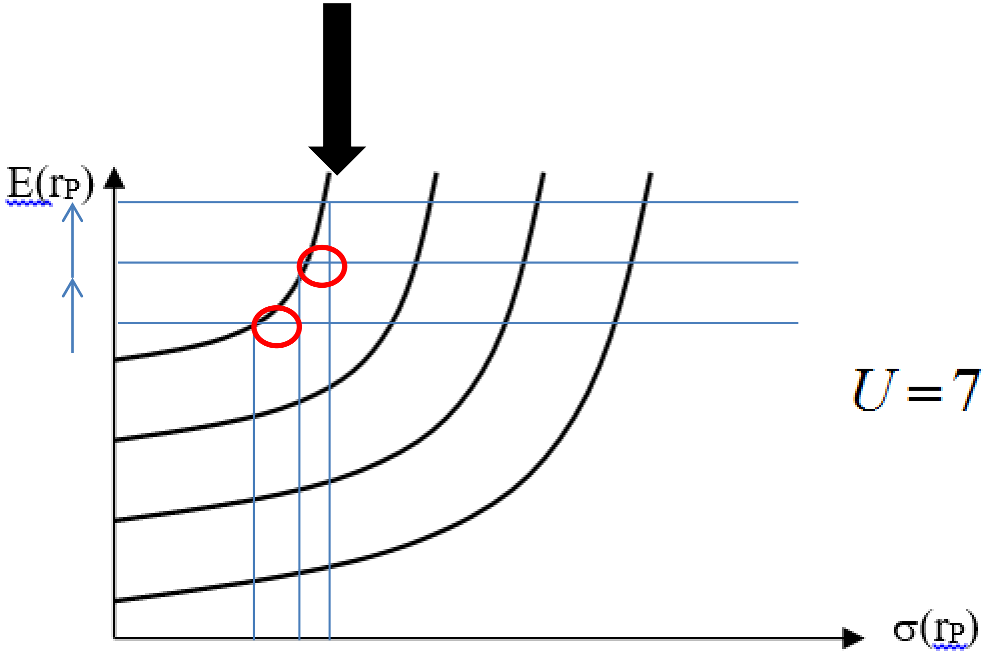
- Las curvas de indiferencia **más bajas**, es decir, las que parten con una ordenada en origen menor, tienen un índice de satisfacción o **utilidad menor**.

- La utilidad del inversor depende únicamente de dos parámetros o características: el rendimiento esperado y su varianza.



- Estas curvas de indiferencia responden a las preferencias de un individuo que siente **aversión al riesgo** (le desagrada), porque para **incrementos** iguales de **rendimiento** esperado, los correspondientes **incrementos** del **riesgo** que el inversor está dispuesto a soportar **son cada vez menores**.

- El inversor actúa presionado por **dos fuerzas de sentido opuesto**: la satisfacción que le produce el rendimiento esperado y la insatisfacción que le produce el riesgo que dicho rendimiento esperado le proporciona.



$$U = 75\, E(r_p) - 50\, \sigma_p^2$$

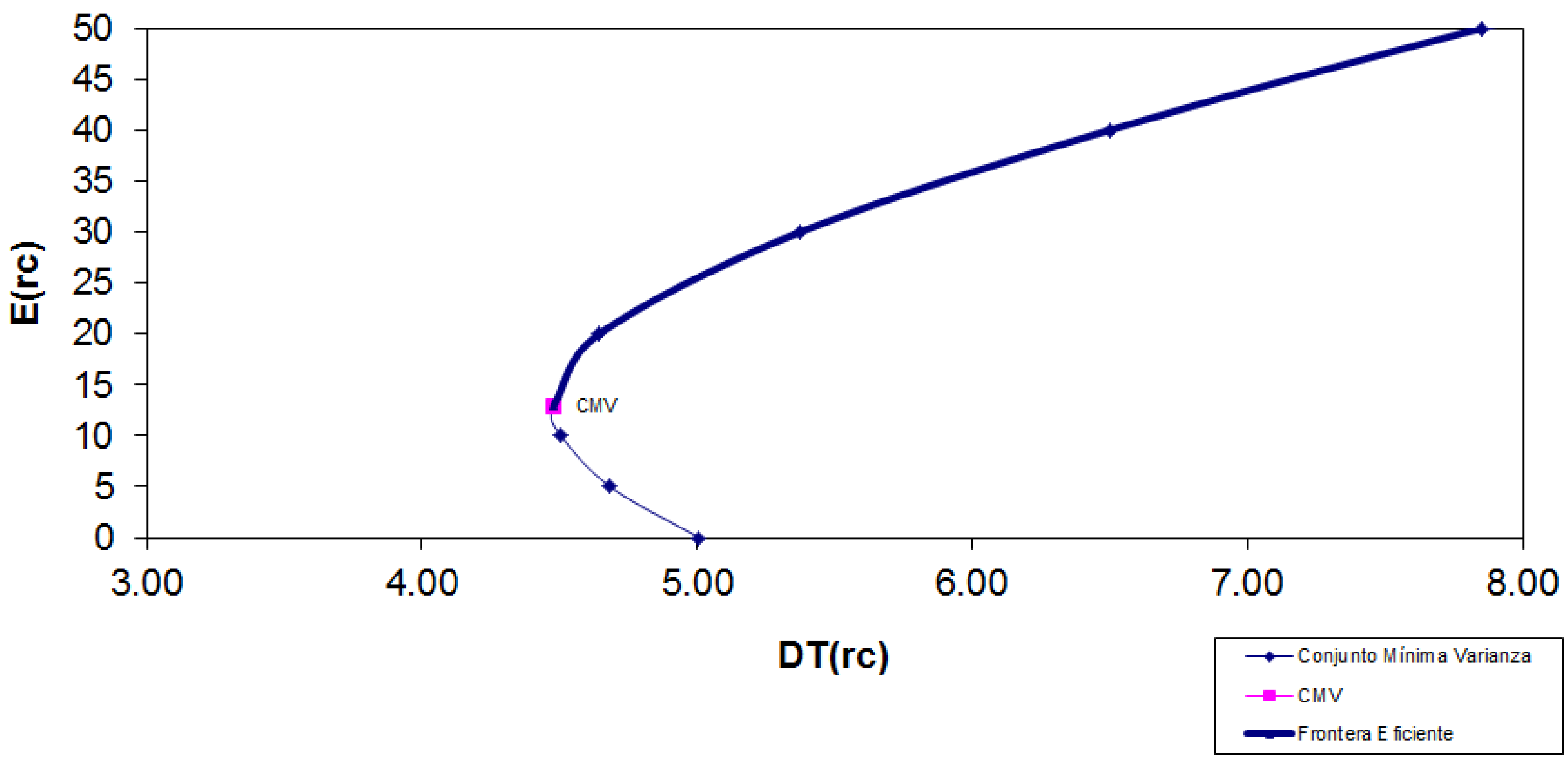
Un inversor desea formar una cartera a distribuir en tres activos cuyos datos son:

DATOS

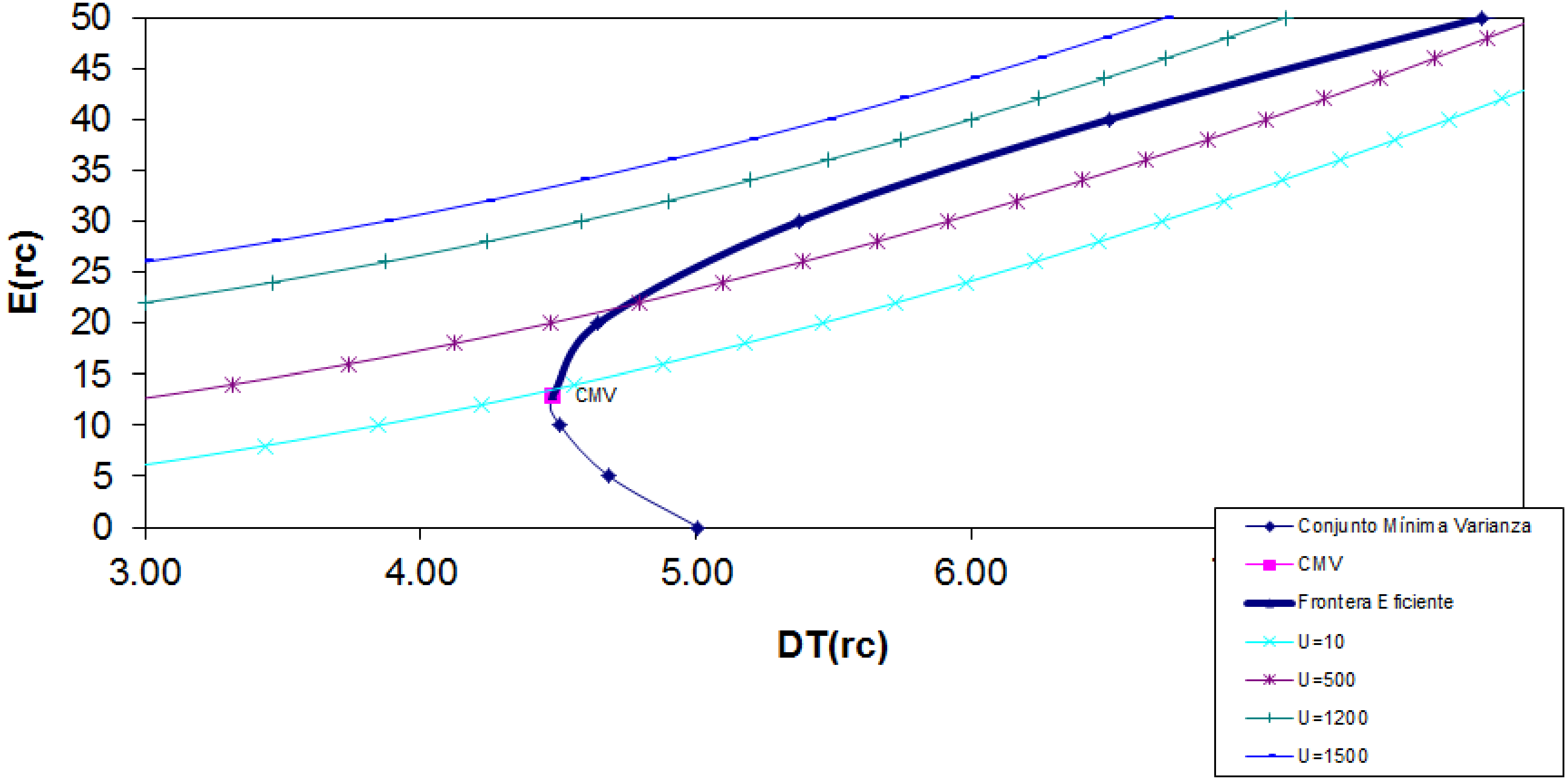
	E(r)
activo 1	6
activo 2	90
activo3	12

Matriz de Varianzas y Covarianzas

	activo 1	activo 2	activo3
activo 1	25	5	10
activo 2	5	200	15
activo3	10	15	50



$$U = 75\ E(r_p) - 50\ \sigma_p^2$$



FASE 4:

Determinación de la **cartera óptima**

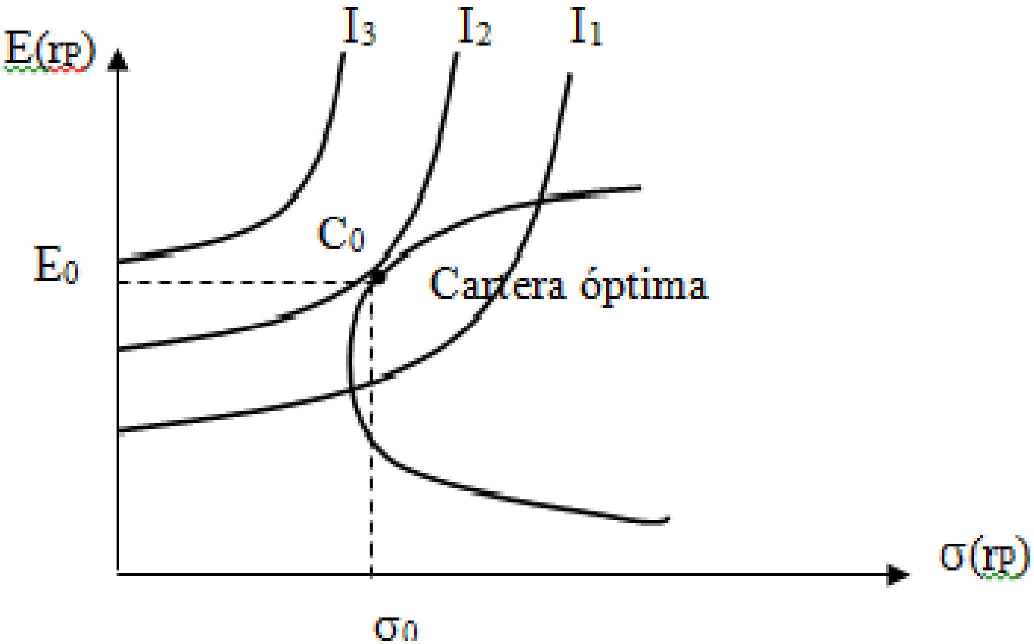
- Para determinar la **cartera óptima del inversor** hay que especificar sus **curvas de preferencia** entre rendimiento esperado y riesgo. Su forma depende de su **función de utilidad** y ésta es **distinta** para cada **inversor**.

- **La cartera óptima viene dada por aquel punto de la frontera eficiente que es tangente a las curvas de indiferencia.**

- Cualquier otro punto de la curva de carteras eficientes se correspondería con una curva de indiferencia de menor índice de utilidad.

- La frontera eficiente viene determinada por las posibilidades objetivas del mercado, y por tanto, es igual para todos los inversores, mientras que la familia de curvas de indiferencia responde a las preferencias de cada inversor y puede ser distinta para cada uno de ellos.

Cartera óptima



Cálculo de la cartera óptima SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE EL SOLVER Solver: max U, cambiando x1,x2 y x3 sujeto a x1+x2+x3=1

Max U	895.194274	Nivel de utilidad que proporciona ese punto de la frontera		Optimo:
s.a	1.000001	1	E[rP]	37.7156378
			DT(rP)	6.21848625
x1	0.44687569			
x2	0.36406256			
x3	0.18906275